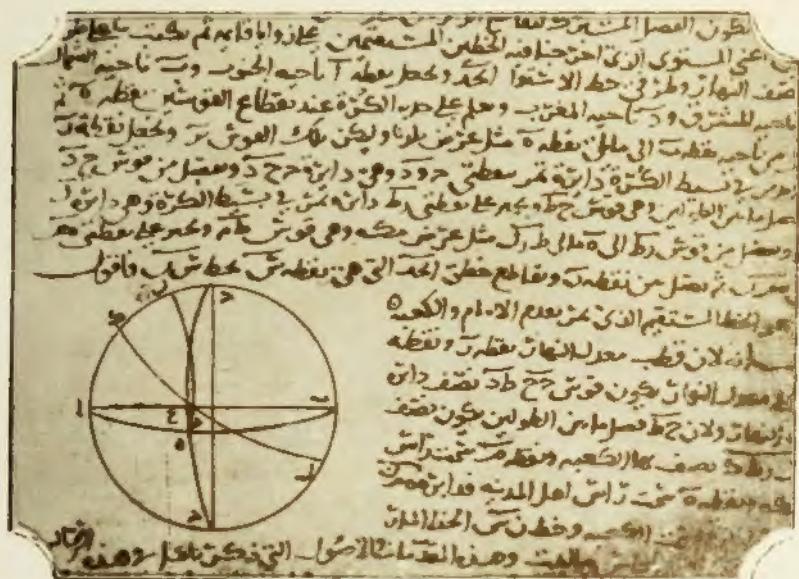


# JOURNAL for the HISTORY of ARABIC SCIENCE



Vol. 6  
Nos.  
1 & 2  
1982



University of Aleppo

Institute for the History of Arabic Science

Aleppo, Syria

Q124.6

J68

6

# مجلة تاريخ العلوم العربية

١٩٨٢

العددان الأول والثاني

المجلد السادس

## محتويات العدد

### القسم العربي

#### الابحاث :

- رغدني راشد : نصوص لتأريخ الاعداد المتناهية وحساب التوافقات ..... ٣
- ..... ( الجزء الفرنسي ) ..... ٦٩
- عادل انبوي : القبيصي صاحب الرمال في جمع أنواع من الاعداد أيا صوفيا ؛ ٤٨٣٢ ، ص ٨٥ ب - ٨٨ أ ٧٣
- ..... ( الجزء الفرنسي ) ..... ١٥٠

### ملخصات الأبحاث المنشورة في القسم الاجنبي

١. م. كندي وذهفيد كينج : ألفك المندي في القرن الرابع عشر في مدينة فاس ؛ ..... ١٠١
- زيح شعري لقنطلي ..... ١٠١
- ج. ل. يرغون ؛ البيروني والمصورات المستوية للكرة ..... ١٦٩
- لوتس ويشتر - بيرنهورغ : مقالة البيروني في تسليح الصور وتجليح الكور : ..... ١٦٨
- ملاحظات وتعليق ؛ ترجمة المقدمة ..... ١٦٨
- ريشارد لوتش ؛ آلة نصر بن عبد الله في سمت القبلة ..... ١٠٣
- جان بيتر هوخنليك : اعادة ترتيب خطوط عربي في الرياضيات والفلك ؛ ..... ١٠٥
- بانكيور ٢٤٦٨ ..... ١٠٥
- ملاحظات لمن يرغب الكتابة في المجلة ..... ١٠٧
- المشاركون في هذا العدد ..... ١٠٨



## نصوص التاريخ الأعداد المتحابة وحساب التوافقات

### رشي رشيد

ستين النصوص التي ننشرها ههنا محققة مدى ما بلغته نظرية الأعداد الأولية من تقدم ومدى ما وصل إليه حساب التوافقات من نتائج على أيدي من كتب بالعربية في أواخر القرن الثالث عشر الميلادي خاصة . فالنص الأول ، وهو أهمها بكثير ، يكفي وحده لبيان خطأ من توهم — وهم أكثر المؤرخين — أن نظرية الأعداد هي أقدم فروع الرياضيات العربية قاطبة . وكيف يكون هذا الوهم ممكناً ؟ أليس من العجيب ألا تتطور نظرية الأعداد بعد ما حققه الجبر الحسابي من تقدم بفضل الكرجي ومدرسته ؟ وكذلك ستطرح هذه النصوص بوجه آخر ، ألا وهو خطأ من ظن أن اللجوء إلى المثلث الحسابي لدراسة مجموعات الأعداد المثلثة وما فوقها من المراتب وأن التفسير التوافقي لعناصر المثلث الحسابي ، هما من مكتسبات القرن السابع عشر .

فبعد قراءة هذه النصوص ستري ، بما لا يدع للشك مجالاً ، أن نظرية الأعداد لم تقف عند تراث الإسكندرية ، أي عند نقل وشرح الكتب العددية من « أصول » أوقليدس « ومقدمة » نيقوماخوس ، بل لا تقف حتى عند ما زاده ثابت بن قرة — وخاصة نظريته في الأعداد المتحابة — وغيره من أمثال عبد القاهر البغدادي . فنظرية الأعداد ذهبت إلى أبعد من ذلك بكثير بفضل الجبر ، أو على وجه التحديد بفضل تطبيق الوسائل الجبرية التي ابتدعها الكرجي ومدرسته في دراسة الأعداد وخصائصها . ولعل أهم نتيجة لهذا التطبيق هو ظهور فصل جديد في نظرية الأعداد لم يكن معروفاً من قبل ، لا بهذا الاتساع ولا بهذه الصورة التي نجلدها عليها في الرياضيات العربية ، فضلاً عن أسلوب حديث في النظر والبرهان ، سيكون هو أسلوب نظرية الأعداد فيما بعد حتى سنة ١٦٤٠ على الأقل . أما هذا الفصل الجديد ، فيتضمن كل ما لا غنى عنه في البحث عن خصائص أجزاء الأعداد وقواسمها ، وهذه الخصائص نفسها . والباعث وراء هذه الدراسات لم يكن إلا البحث عن برهان آخر غير برهان ثابت بن قرة للبرهان على نظريته عن الأعداد المتحابة . وأما الأسلوب الحديث ، فهو توافقي ، جبري ، قلم يعد هندسياً دون أن يصبح عددياً خالصاً .

هذه هي بالجملة مميزات النص الأساسي والأول الذي تقدمه ههنا ، وهو رسالة كمال الدين الفارسي في الأعداد المتحابة ، والتي تضم بين قضاياها كثيراً مما ينسب عادة إلى علماء القرنين السادس عشر والسابع عشر ، أو ما بعدهما أحياناً . ونجد بين هذه القضايا :

- أول صياغة معروفة حتى يومنا هذا لما يُسمى بنظرية الحساب الأساسية ، أي أن كل عدد يمكن تحليله وبصورة واحدة إلى عناصر أولية متتهية العدة .
- أول دراسة معروفة لتابع مجموع أجزاء العدد ولتابع مجموع قواسمه ، والبرهان على جدائية هذا الأخير .
- أول دراسة معروفة لبعض خصائص تابع عدد أجزاء العدد وتابع عدد قواسمه ؛ ومن ثم أول دراسة معروفة للتوابع الحسابية الأولية ، والتي كانت تُعزى ، هي وكثير من القضايا التي برهن عليها الفارسي ، إلى ديكرات وآخرين من بعده .

ومما ينبغي التنبيه له هو لجوء الفارسي إلى المثلث الحسابي لدراسة مجموعات الأعداد المثلثة وما فوقها من المراتب . واضطره هذا إلى تفسير توافقي لا غموض فيه لهذا المثلث ، وهو التفسير الذي كان ينقص الكرجي والسموعل من بعده كما بينا في موضع آخر<sup>١</sup> ، والذي سيقوم به بسكال مرة أخرى . ومن الملاحظ أن الفارسي لا يقف عند هذا التطبيق وعند تلك العبارات التوافقية للتفسير والشرح ؛ مما يدل على أنها كانت شائعة مألوفة في عصره .

وينهي الفارسي رسالته هذه بحساب ما سُمي بعددي فرما ، أي ١٧٢٩٦ و ١٨٤١٦ ، وبالبرهان على أنهما متحابان .

ونستطيع الآن أن نقطع بأن رياضي هذا العصر كانوا على معرفة بهذين العددين ، ولكن لا يمكننا أن نقرر من هو أول العارفين بهذا الأمر . فنحن لا ندرى بالدقة متى كان تحرير الفارسي لكتابه ، إلا أن هذا قد تم قبل عام ١٣٢٠ وهو تاريخ وفاة الفارسي . ولكن النص الثاني الذي نشره هنا ، وهو نص التوخي ، الذي حرر سنة ١٣٠٧ يضم العددين والبرهان على تحابهما . فكل ما نستطيع أن نقوله الآن هو أنه بين ١٣٠٧ و ١٣٢٠ على أكثر تقدير كان هناك على الأقل شاهدان على ما أثبتنا . بل يمكننا أن نزيد على هذا ونبين بفضل

١ - انظر إلى مقالنا ، *Algèbre et Linguistique: l'analyse Combinatoire dans la science arabe*; dans R. Cohen, *Boston Studies in the Philosophy of Sciences*, Reidel Pub. Company, 1973, p. 383-399.

النص الثالث أن العددين المتحابين — ٩٣٦٣٥٨٤ و ٩٤٣٧٠٥٦ — اللذين يحملان اسم ديكرارت كان قد تم حسابهما على يدي محمد باقر بن زين العابدين الزدي قبل الفيلسوف بقليل .

أما النص الرابع فهو لابن البناء المراكشي ، وهو فصل من كتابه المسمى : « رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب » . وهذا الكتاب هو تفسير وشرح لكتابه المعروف « تلخيص أعمال الحساب » أو كما قال هو نفسه وشرح مقصده في مقدمة « رفع الحجاب » : « فإن كتابي الذي وضعته في تلخيص أعمال الحساب ، وتقريب معانيه ، وضبط قواعده ومعانيه ، قد جمع صناعة العدد العملية بصنفي المعلوم والمجهول . فأردت إيضاح ما يتجمل من العلم ، وشرح ما يظن غير المحصل أنه مستغلق فيه على الفهم ، وبيان أصول القواعد والمباني » .

وإذ قد أتينا بهذا النص هنا ، فلما يحتويه من قضايا رياضية في حساب التوافقات ، وأيضاً للدلالة التاريخية التي يدل عليها . فلنذكر أولاً بهذه القضايا . وقبل هذا فلنرمز بـ  $(n)_r$  إلى عدد الصور من الحجم  $r$  المأخوذة من مجموعة  $A$  عدتها  $n$  ،  $(r \leq n)$  ، فمن السهل برهان أن :

$$(n)_r = n(n-1) \dots (n-r+1) ,$$

والآن يمكننا ترجمة قضايا ابن البناء على النظم التي وردت في كتابه :

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} ,$$

$$(n)_n = n! ,$$

$$(n)_r = r! \binom{n}{r} ;$$

وهذه القضايا مبرهنة إلا للحالتين  $r=1$  ،  $r=0$  ؛ وأخيراً القضية التالية التي لم يقم البرهان عليها :

إذا كانت  $A = (m_1, \dots, m_n)$  مجموعة من الحروف عدتها  $n$  ، متميزة كلها ، وكان  $n(A)$  تبديلاً ما من تباديل المجموعة  $A$  ، وليكن أول حروفه  $m_k$  مثلاً ، فإنه يمكننا الحصول على كل تبديل  $A$  من المتتالية التي نحصل عليها بتكرار  $n(A)$  ،  $(n-1)$  مرة ثم إضافة  $m_k$  . وهكذا فكل تبديل  $A$  هي داخل المتتالية الحادثة والتي عدد حروفها  $n(n-1) + 1$  .

مثال ذلك : فلتكن مجموعة الحروف  $A = (a, b, c, d)$  ، ولنأخذ تبديلاً ما وليكن  $(b, d, a, c)$  : فإنه يمكننا الحصول على كل تبديل  $A$  من المتتالية ذات  $1 + (4 \times 3)$  حرفاً :

$$(b, d, a, c, b, d, a, c, b, d, a, c, b)$$

هذا هو ما نجد في نص ابن البناء ، وهو ما يمكن استنباطه بسهولة فائقة من القانون الأساسي للمثلث الحسابي ، الذي كان منتشرأ معروفاً بين الرياضيين من بعد ما أقامه الكرجي في أواخر القرن العاشر . وهذا القانون ، أعني

$$\left(\frac{n+1}{r}\right) = \left(\frac{n}{r}\right) + \left(\frac{n}{r-1}\right) .$$

هو ما يطبق الفارسي بصور متعددة ، ومرات متتابعة ، ويغمره بأسلوب توافقي خالص . ولكن يبقى عند الفارسي ما لا أثر له عند ابن البناء ، وهو الربط الواضح العام بين المجموعات العددية وبين المثلث الحسابي ، وأيضاً التفسير التوافقي لعناصر هذا المثلث ، أي الخطوة الأساسية لتكوين حساب التوافقات كفصل مستقل من فصول الرياضيات .

وإذا كان ذلك كذلك ، فمن المرجح أن كثيراً من القضايا السابقة المتعلقة بالقانون الأساسي أو بمشتقاته ، هي مما ورث السلف لابن البناء والفارسي وغيرهم ، فهذا الأخير قد وافته المنيّة عام ١٣٢٠ - كما قلنا - وفي تبريز ، وابن البناء لم يخلفه إلا عالماً واحداً - وبالمغرب . والأول يقوم يبحث أصيل أراد فيه العثور على برهان جديد لنظرية ثابت بن قره في الأعداد المتحابة ، بينما أراد الثاني أن يكتب كتاباً تعليمياً يشرح فيه كتاباً تعليمياً آخر له ، ويرفض صراحةً معالجة الأعداد المتحابة . فما بقي بينهما من اتفاق لا يمكن إلا أن يرجع ، حسب ما يبدو لنا ، إلى ما ورثوه .

أما النص الخامس فهو لبيان مدى انتشار عددي «فرما» بين الرياضيين والشراح . فهذا النص يبين لنا أن مؤلفه المتوفى في أوائل القرن الخامس عشر الميلادي ، وهو ابن هيدور التادلي ، من شراح ابن البناء المراكشي ، كان على معرفة بهذه العديدين كما كان يريد أن يحور رسالة يأتي فيها بالبرهان على تحاب الأعداد ، أي بما لم يفسح به المجال في كتابه «التمحيص في شرح التلخيص» الذي أخذنا منه هذا النص .

لقد قمنا من قبل بدراسة تاريخية ورياضية لهذه النصوص ولغيرها ، ولا نريد أن نكرر هنا ما قلناه هناك ، وسنكتفي هنا بتقديم هذه النصوص أنفسها .

كتب كمال الدين الفارسي<sup>١</sup> شرحاً لكتاب ابن الخوام البغدادي - « الفوائد البهائية في القواعد الحسابية » هو أضخم ما ألفه في الرياضيات ، وسماه « أساس القواعد في أصول الفوائد » . وبين كتاب الفارسي هذا وبين رسالته في الأعداد المتحابة صلة وثيقة لم يتبها لها المؤرخون القدماء مثل طلائع كبري زاده ولا المحدثون مثل بروكلمان ، سوتر ، كراوسه . فمما أورده الفارسي نفسه نعرف أنه ألحق « التذكرة » بأساس القواعد كتتمه له . ففي مستهل هذا الأخير يعرض الفارسي للأعداد المتحابة بقوله<sup>٢</sup> : « فأما طريق استخراج المتحابين وحصر الأجزاء - بأن يتيقن أنه لا جزء غير ما عرف وسائر أصوله وفروعه - واستخراج الأعداد الثمانية والزائدة والناقصة ، فسيلحق بآخر هذا الكتاب على ما يساعد التوفيق » . وقول الفارسي هذا إن لم يدل على أنه قد حرر « التذكرة » قبل شروعه في كتابه « أساس القواعد » ، فإنه يبين على الأقل أنه كان يعرف ما مستضمه « التذكرة » ، وأنه لم يكن يعتبر أنهما مصنفان منفصلان .

وما سبق يفسر لنا تماماً ظهور مخطوطة « التذكرة » كجزء من مخطوطة « أساس القواعد » . فنحن لا نعرف أية مخطوطة مستقلة « للتذكرة » ، وإن كنا كثيراً ما نجد أساس القواعد دون تلك الرسالة ، كما يشهد بذلك - على سبيل المثال لا الحصر - المخطوطات الثلاث لهذا الأخير بمكتبة السلطان أحمد الثالث . وسقوط « التذكرة » في مثل هذه الأحوال يرجع مما لا شك فيه إلى النسخ في حياة المخطوطة الطويلة .

ويمكننا أن نستشف من كتابات المؤرخين أن « تذكرة » الفارسي هذه كانت معروفة متداولة حتى القرن السادس عشر على الأقل ، ويكفي في هذا الصدد أن نقرأ ما يقول صاحب « مفتاح السعادة » : « أما طريق استخراج الأعداد المتحابة فقد بيّن مستوفى ببراهين عديدة في كتاب « تذكرة الأحباب في بيان التحاب » ، وهذا كتاب نفس ، يدل على فضل مؤلفه ، وعلو كعبه في العلوم الرياضية ، يشهد بذلك كتابه المذكور » . ونقرأ أيضاً في كتاب حاجي خليفة عند كلامه على علم الخواص « ومنها خواص الأعداد المتحابة والمتباغضة كما بيّن في تذكرة الأحباب في بيان التحاب »<sup>٣</sup>

١ - انظر مقالة Kamāl-al-Dīn في Dictionary of Scientific Biography (New York, Scribner's), vol. VII, 1973.

٢ - انظر صفحة ١٤ - و من مخطوطة آستان قدس رضوي التي سنشر إليها فيما بعد بقليل .

٣ - انظر طبعة كامل كامل بكري وعبد الوهاب أبو النور ، القاهرة ١٩٦٨ ، الجزء الأول ، ص ٢٩٦ .

ومن الواضح أن حاجي خليفة يستدل بهذا النص نفسه .



وحتى وقت قريب لم يُعرف من مخطوطات هذه الرسالة إلا ما ذكره كراوسه ،  
أي مخطوطة مكتبة كوبرولو . ولقد عثرنا في أوائل السبعينيات على مخطوطة أخرى « للتذكرة »  
بمكتبة آستان قدس رضوى ، ثم عثرنا بعد ذلك على مخطوطة ثالثة بمكتبة خدا بخش ،  
وكذلك على فقرة من هذه الرسالة في مكتبة الوزير الشهيد علي . وبعد العثور على هذه النسخ  
أصبح من الممكن التحضير لنشرة نقدية لهذه الرسالة . ونعرض الآن تباعا هذه المخطوطات .  
أ - مخطوطة كوبرولو ٩٤١ .

ذكرها كراوسه ، كما قلنا ، وهي تشتمل على :

• « أساس القواعد في أصول الفوائد » ، من ١ - وإلى ١٢٨ - ظ حسب الترقيم القديم  
الذي اتبعه كراوسه ، أو من ١ - وإلى ١٣١ - و بالترقيم الذي استعمل فيما بعد .  
وقد كتب الناسخ في آخره ما نصه : « تجزرت كتابته بتوفيق الله تعالى يوم الخميس أول  
نهاره منتصف رجب سنة ٧٣٦ الهلالية » .

• « تذكرة الأحباب في بيان التحاب » : من ١٢٨ - ظ إلى ١٣٦ - وحسب الترقيم  
القديم ، أو من ١٣١ - ظ إلى ١٣٩ - و بالترقيم الأخير . وكتب الناسخ في آخر  
الرسالة : « فرغ من تحريره بحمد الله تعالى وحسن توفيقه العبد الضعيف الراجي إلى  
رحمة ربه اللطيف نوح بن علاء الدين الاتعاني يوم السبت وقت الضحى عشرين  
من شهر رجب سنة سبع وثلاثين وسبعماية في المدرسة الصادقية ، رحم الله واقفها ،  
في محروسة بغداد ، حرسها الله من الآفات ، وصلى الله على نبيه محمد وآله أجمعين » .  
وبما أنه نفس الناسخ كما يشهد بذلك الخط ، فهذا يعني - لو كان كلا التاريخين  
صحيحاً - أنه انتظر ستة كاملة وعدة أيام حتى ينتهي من نسخ ثنائي أوراق « التذكرة » .  
ويتم بهذا الكتاب . وهذا إن لم يكن مستحيلاً فهو غير معقول ، هذه واحدة . أما  
الأخرى فهي تناقص بين التاريخ . فالتاريخ الأول ، أعني يوم الخميس منتصف  
رجب ٧٣٦ ، غير صحيح لو اعتبرنا أن المقصود بمنتصف رجب هو الخامس عشر  
منه . فالخامس عشر من رجب سنة ٧٣٦ هو يوم الأربعاء لا الخميس الموافق للثامن  
والعشرين من شهر فبراير سنة ١٣٣٦ . ويستقيم الأمر إذا افترضنا أن التاريخ الأخير  
أي تاريخ الرسالة هو الصحيح ، وأن سهواً وقع عند كتابة التاريخ الأول بالأرقام .

ومما يجذب هذا الرأي ، أن العشرين من رجب سنة ٧٣٧ هـ هو حقاً يوم السبت الموافق للثاني والعشرين من فبراير سنة ١٣٣٧ ميلادية . وهكذا فنحن أقرب إلى الحقيقة إذا افترضنا أن الناسخ يعني « بمقتصف » التقدير لا التحديد ، ويكون قد انتهى من كتابة « أساس القواعد » يوم الخميس ١٣ فبراير سنة ١٣٣٧ ثم أتم « التذكرة » بعدها بتسعة أيام ، وفي كل الأحوال نستطيع أن نقطع أن رسالة الفارسي هذه قد نسخت بعد وفاة مؤلفها بحوالي ١٧ سنة على أكثر تقدير .

ونجد في نفس المخطوطة وبفلس الخط - في آخر أساس القواعد - مسألة ميراث قصيرة ؛ ثم نجد في آخرها بخط مختلف مسائلين لا علاقة لهما بما نحن فيه ، زادهما ناسخ آخر على ما بقي من صفحات فارغة ، وهي من ١٣٩ - ظ إلى ١٤٠ - ظ ، وبهذا تنتهي المخطوطة .

وأما مخطوطة « أساس القواعد » و « التذكرة » فهي بخط فارسي جميل ، والرسوم بحبر أحمر ، كذلك خطوط الجداول وأرقام الأشكال وبعض الكلمات في هذه الأخيرة . وطول الصفحة ٢٤ سنتيمتراً وعرضها ١٨ سنتيمتراً وتحتوي على ٢٥ سطراً ، وكل سطر منها على ١٦ كلمة تقريباً .

وفي هامش المخطوطة لَحَقَّ بخط ناسخها ، استدراكاً لما سها عنه ، مع الاختصار المعروف « صح » ليتبين أنه هو الذي استدرك ما نُسي . ولكن لا يزال ينقص هذه المخطوطة بعض العبارات كما سيتبين ذلك بمقارنتها مع المخطوطات الأخرى .

ومستشير لهذه المخطوطة بحرف « ك » وسأخذ بأرقام صفحاتها عند التحقيق .

ب - مخطوطة آستان قدس رضوى ٥٥٧٨ .

وهي تشتمل أيضاً على :

- « أساس القواعد في أصول الفوائد » ، من ١ - وإلى ١٢١ - و .
- « تذكرة الأحباب في بيان الثحاب » : من ١٢١ - ظ إلى ١٢٧ - ظ .

ولا يتم النسخ « التذكرة » ، بل يتوقف قرب نهايتها ، فتتقصها فقرة أخيرة ؛ وهو لا ينسخ أيضاً بعض الجداول تاركاً فراغاً مكانها . وإن كان خطه فارسياً جميلاً إلا أنه بهمل ويتكاسل عند اقترابه من نهاية المخطوطة ، فتريد أخطاؤه ، ويترك فقرة كما قلنا .

أما عن تاريخ النسخ، فلقد وقع الفراغ من « أساس القواعد » كما يقول « وقت الظهر من غرة رجب المُرجَّب لسنة ثمان وأربعين وثمانمائة على يدي العبد الضعيف زين العابدين ابن علي بن محمد الحسني ، تاب الله عليه وأصلح شأنه وأحواله » أي سنة ١٤٤٤ ميلادية .

ولا ندري أين تم نسخ هذه المخطوطة ، إلا أن هناك على أولى صفحاتها عدة اختتام، منها ختم سلطان الدين محمد بن قطب ، مما يرجح أنها ظلت في المنطقة الشرقية من العالم الإسلامي .

ورسوم المخطوطة وحروف البراهين بحجر أحمر ، وكل صفحة طولها ١٧,٧ سنتيمتراً وعرضها ١٣,٣ سنتيمتراً ، وتحتوي على ١٧ سطراً ، وكل سطر على ١٩ كلمة تقريباً . وعادة ما يتقص هذه المخطوطة أرقام الأشكال ، وهي أيضاً خالية من الهوامش ، أو من أي علامة تبين أن الناسخ عارض النص بالأصل .

وستشير لهذه المخطوطة بحرف « م » .

ج - مخطوطة خدا بخش ٢٠١٢ .

وهي أيضاً تشتمل على :

- « أساس القواعد في أصول الفوائد » . من ١ - وإلى ٩٧ - ظ .
- « تذكرة الأجباب في بيان التحاب » ، من ٩٨ - وإلى ١٠٢ ظ .

وينقص هذه المخطوطة جزء يتضمن آخر « أساس القواعد » وأول « التذكرة » ، مما يدل على سقوط بعض أوراقها . أما عن تاريخ النسخ ، فنقرأ في آخر « التذكرة » : « قد فرغت من انتساخ هذه النسخة الشريفة اليمونه ... في أواخر ذي الحجة أحد وتسعين وثمانمائة هجرية ، أنا عبد النبي ( ؟ ) بن محمد بن حسين اليرجندي ... » أي في أواخر سنة ١٤٨٦ ميلادية ؛ ولا ندري أين كان مكان نسخها .

والخط فارسي واضح، والرسوم وحروف البراهين وأرقام الأشكال وخطوط الجداول وأغلب العناوين بحجر أحمر . وطول كل صفحة ٢١ سنتيمتراً ، وعرضها ١٢ سنتيمتراً وتحتوي على ٢١ سطراً ، وكل سطر على ١٤ كلمة تقريباً .

وتدل هوامش المخطوطة على أن الناسخ قد عارضها بالأصل بعناية ؛ وكثيراً ما كان ينقل عبارة أوقليدس في الهامش حين يشير الفارسي إليها دون أن ينقل نصها .

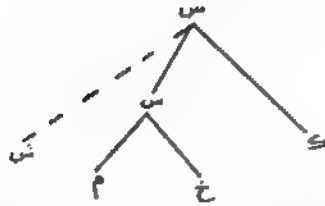
وستشير لهذه المخطوطة بحرف « خ » .

ج - مخطوطة الوزير الشهيد على باسطنبول ١٩٧٢

وتشتمل هذه المخطوطة على :

- « أساس القواعد في أصول القوائد » ، من ١ - وإلى ٢٦٨ - و .
  - بداية « تذكرة الأحباب في بيان التحاب » ، من ٢٦٨ - ط إلى ٢٧٠ - و .
- فبعد أن يتم النسخ « أساس القواعد » لا يتقل من « تذكرة الأحباب » إلا بدايتها . والمخطوطة بخط نسخي ، وحذفت منها الرسومات ، وكتبت الحروف المستعملة في البراهين بحجر أحمر . وطول الصفحة ١٣ ستيماً وعرضها ١٢ ستيماً وتحتوي على ٢١ سطراً وكل سطر على ١٠ كلمات تقريباً .
- وليس في هوامش المخطوطة شيء بغير خط كاتبها وهي استدراكات في مواضع يسيرة لما سها عنه . ولا ندري من كان هذا الناسخ ولا مكان ولا زمان النسخ ، وإن اكتفينا بالتخمين ، فقد تكون من القرن التاسع أو العاشر الهجري .
- وأشرنا إليها بحرف « ش » .
- أما سيرتي في تحقيق النص ، فقد سلكت الطريق الذي سبق أن سلكته عند تحقيق « رسائل الخيام الخيرية » وذلك بالبداية بتصنيف المخطوطات . والمنهاج في هذا هو ما شرحناه هناك بإثبات كل الاختلافات بين المخطوطات وبيان ما يتقص من كل منها بمقارنته بالأخرى وكذلك أخطاء كل منها بالنسبة للأخرى . والطريق الذي وصفناه هناك يبين :
- أن مخطوطة « ك » ، وهي أقدم ما نمتلك ، ليست بأصل للمخطوطات الأخرى ، بل تنقصها عبارات هامة لسياق النص . فهذه المخطوطة تمثل تقليداً مخطوطياً مستقلاً .
  - أن مخطوطة « م » أيضاً ليست بأصل لمخطوطة « ح » التي كتبت بعدها بحوالي نصف قرن .
  - أن « م » و « خ » نتحدان من جد - أو أب - واحد .
  - أن « م » ليست بأصل « ش » .
  - أن قصر الفقرة الباقية من « ش » وضياح هذه الفقرة من « خ » ، لا يسمع لنا بأي استنتاج عن علاقة الواحدة بالأخرى .

ونستطيع تمثيل هذا بالصورة التالية :



٢ - كتاب في علم الحساب (التنوشي) . القاتيكان (٢) ٣١٧ ، من ٧٥ ظ إلى ٨٩ ظ .  
هو زين الدين أبو عبد الله محمد بن محمد بن عمرو التَّنُوشِي المعري ، ولا نعرف ترجمة له . ونعرف له غير كتابه هذا رسالة في حساب الخطأين سماها « كشف الغطاء في استنباط الصواب من الخطأ » ، وهي مخطوطة من نفس المجموعة (٣) ٣١٧ ، من ٩٠ - و إلى ٩٢ - و . وفي أول هذه الرسالة أضيف إلى اسمه لقب « الحاسب » ، ونقرأ في آخرها « نجز في العشرين من جمادي الأول سنة سبع وسبعمائة » . فالتنوشي هو إذاً حاسب على قيد الحياة في أوائل القرن الرابع عشر الميلادي . فهل هو نفس التنوشي الذي ذكر له حاجي خليفة في « كشف الطنون » : « أقصى القرب في صناعة الأدب » ، فيكون بهذا أديباً وحاسماً . وما يجعل هذا ممكناً - ولكن ليس يقيني - تشابه الاسم . فلقد سماه حاجي خليفة « زين الدين أبا عبد الله محمد بن محمد التنوشي » وجعل وفاته سنة ٧٤٨ (١) .

والمخطوطة هي بخط نسخي قديم ، وطول الصفحة ١٩,٥ ستيماً وعرضها ١٣,٥ ستيماً ، وتحتوي على ٣١ سطراً ، وكل سطر على ١٩ كلمة تقريباً ، ولا ندري شيئاً عن مكان وتاريخ نسخ المجموعة التي تضم هاتين الرسالتين للتنوشي مع رسائل رياضية أخرى .

### ٣ - عيون الحساب (لليزدي) ١٩٩٣ E. Hazinesi باسطمبول

محمد باقر بن زين العابدين اليزدي من الرياضيين المتأخرين ، فلقد توفي سنة ١٦٣٧ ميلادية على وجه التقريب . أما عن « عيون الحساب » فهو أحد مراجع هؤلاء الأساسية .

١ - يذكره أيضاً اسماعيل اليمداني كما ذكره من قبل طاهر كبري زاده ، ولكن لا نجد جديداً فيما قابوه . ولقد رجعنا إلى كتاب « الدرر الكامنة في أعيان المائة الثامنة » لابن حجر العسقلاني المتوفى سنة ٨٢٥ لم نجد ترجمة له .

ولا غرابة أن نجد منه مخطوطات كثيرة لا بد من مقارنتها لنشره بصورة علمية . وإن كنا قد قمنا بهذا فيما يخص ما سبق من النصوص وكذلك ما سيأتي فيما بعد ، إلا أننا لا نزعم أننا نحقق هذا للفصل الذي اخترناه من كتاب الزدي . فنحن لا نركز إلا على مخطوطة واحدة هي التي نهدف هنا لإخراجها بكل دقة وعناية .

ونقرأ في آخر هذه المخطوطة تاريخ الانتهاء من نسخها وهو « غرة رجب الفرد سنة إحدى وسبعين ومائة ألف » ، وذلك على يد أضعف الضعفاء صدقي الحاج مصطفى ... . فالمخطوطة هي إذاً من القرن الثامن عشر ، ١٧٥٨ ميلادية على وجه التحديد . وهي من ١٢٠ ورقة . وثلاث ورقات غير مرقمات عليها بعض الجداول . والصفحة الأولى لا تضم إلا رسماً للمثلث الحسابي ، والصفحة الثانية لم يكتب فيها إلا العنوان واسم المؤلف . أما الخط فنسخي أنيق . وطول الصفحة ١٧,٤ سنتيمتراً وعرضها ٧,٢ سنتيمترات وتحتوي على ٢٩ سطراً وكل سطر على ١٣ كلمة تقريباً .

#### ٤ - رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب (ابن البناء)

لقد كتبه ابن البناء المراكشي سنة ٧٠١ هجرية ، أي سنة ١٣٠١ - ١٣٠٢ ميلادية لشرح كتابه « تلخيص أعمال الحساب » . واعتمدنا في تحقيق الفصل الذي اخترناه هنا على مخطوطين :

أ - تونس (دار الكتب) ٩٧٢٢ ، من ١ - ظ إلى ٤٥ ظ .

ونخط هذه المخطوطة مغربي قديم ، ولكن لا تعرف مكان وزمان نسخها ولا هوية ناسخها ، وليس في هامشها شيء يغير خط كاتبها ، إلا في موضع واحد اشتبهنا فيه وهو في هامش ١٨ - ظ ، ولكن هناك في مواضع يسيرة جداً بعض استدراكات الناسخ لكلمات نسبها . وطول الصفحة ١٩,٧ سنتيمتراً وعرضها ١٥,٢ سنتيمتراً حسب ما تسمح بقياسه صورة المخطوطة لا المخطوطة نفسها . وتحتوي كل صفحة على ٢١ سطراً وكل سطر على ١١ كلمة تقريباً . والفصل الذي تحققه هنا هو من ١٥ - ظ إلى ١٧ - ظ وأشرنا لهذه المخطوطة بحرف « ت » .

ب - وهي ١٠٠٦ باسطنبول ، من ١٠ - ظ إلى ٤٢ - و

ونخط هذه المخطوطة مشرقية ، وكاتبها هو كاتب مخطوطة عيون الحساب التي تكلمنا عليها ، أي الحاج مصطفى صدقي الذي يقول إنه كتبها نفسه يوم « الأحد الثالث ،

والعشرين من شعبان المعظم لسنة ثلاث وخمسين ومائة ألف هـ . فهي إذاً من تقليد مخطوطي مختلف . ويؤكد هذا أيضاً مقارنة المخطوطين . وطول الصفحة ٢٤,٤ ستيماً وعرضها ١٥,٢ ستيماً وتحتوي على ٢٥ سطراً وكل سطر على ١٣ كلمة تقريباً . وقد أخذنا بأرقام صفحات هذه المخطوطة عند التحقيق . وأشرنا لهذه المخطوطة بحرف « و » .

### ٥ - التمهيد في شرح التلخيص ( لابن هيدور ) ٢٥٢ الحسنية بالرباط

شرح أبو الحسن علي بن عبد الله بن محمد بن هيدور التادلي ، المتوفى سنة ٨١٦ هـ - ١٤١٣ م - في كتابه هذا « تلخيص أعمال الحساب » لابن البناء المراكشي . والفصل الذي اخترناه هنا يبين ، على عكس ابن البناء نفسه ، اهتمام ابن هيدور بالبحث في الأعداد المتحابة . ولقد سبق أن وضعنا موضع الشك نسبة رسالة في الأعداد المتحابة نسبها صديقنا الأستاذ محمد سويسي - لابن البناء ، واقترحنا حيث احتمال نسبتها لابن هيدور . ويرجع نص الفصل الذي نتحققه هنا هذا القرض . ومع هذا فلا يمكننا أن نقول بيقين إن الرسالة التي وعد بها في كتابه هي تلك الرسالة . فهو يعد بالبراهين التي لا نجد لها أثراً في الرسالة .

والمخطوطة التي اعتمدنا عليها لتحقيق هذا النص هي إحدى مخطوطتين بالمكتبة الحسنية بالرباط ، فهي مخطوطة بخط مغربي في مجلدين . أما المخطوطة الأخرى فهي برقم ٣٤٣٥ . وهنا أيضاً نحن لا نزعم بأننا تحقق هذا الفصل ، فنحن لا نركز إلا على مخطوطة واحدة هادفين إلى إخراجها بكل دقة وعناية .

والتزمنا عند التحقيق بالقواعد المتعارف عليها بدقة بالغة . ولم نشب الإعجام إن لم تكن هناك شبهة ، وأخذنا بالرموز التالية ،

< ... > . تقترح إضافة ما بينهما .

[ ... ] . تقترح حذف ما بينهما .

/ انتهاء صفحة المخطوطة التي اختيرت لترقيم صفحات التحقيق .

ت تونس ٩٧٢٢

خ خدابخش ٢٠١٢

ش الشهيد علي ١٩٧٢

ك كوبرولو ٩٤١

م آستان قلس رضوي ٥٥٧٨

# كمال الدين الفارسي

## تذكرة الأجاب في بيان التحاب

١٢١ - ظ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وبه تهي وتوكل

الحمد لله الذي منه المبدأ وإليه المآب ، والصلاة على عبده ونبئه محمد  
الداعي بفصل الخطاب ، الهادي إلى الرشاد والصواب ، صلاة دائمة إلى يوم  
الحساب ، وعلى آله وصحبه ما درّ شارق وغاب .

وبعد : فقد أشار إليّ مَنْ طاعته عليّ فرض محتم ، ورضاه عني لي  
شرف سرّوم ، أيدّه الله تعالى في استكمال وارثاله ومتنائه بطول بقائه وطيب  
لقائه ، في أثناء محاوراته اللطيفة ومباحثاته الشريفة ، تبين الطريقة التي سلكها  
القدماء في استخراج الأعداد المتحابية بياناً عددياً شافياً ، وبرهاناً كافياً غير مفتقر  
إلى مقدمة لم تُذكر ، ومبدأ لم يُحرّر ، اللهم إلا إلى بعض أشكال أقليدس  
التي هي أصول الصناعة ؛ فطاوعت حكمه وامتلئت رسمه ، عارفاً بأنّي قصير  
الباع عن التصرف في المبادئ والمباني ، قليل الاطلاع على الحقائق والمعاني ؛  
فإن أصبت فمن ميامين تلك الإشارة ، وإن طاشت سهام الأفكار فقد قدمت  
الاعتذار . والمأمول من مكارم الفضلاء الباطنين فيه أن يصلحوا ما فسد  
ويتنظّموا ما تبدّد من هذه المقالة ليكون سعيهم مشكوراً وجزاؤهم موفوراً .

وما أنا أبتدىء بذكر الطريقة المشهورة في استخراجها ، ثم أشرع في  
الاستدلال عليها واستنتاجها . وقد انتظم في نيف وعشرين شكلاً ، مُصدّرةً

٨ - المسطر ناقص في ك // ٥ - الذي : ناقصة - ش ، م - // ٨ - لي : له - ش - //

٩ - وارثاله : وإبقاله - ش / ومتنا : ومتنا - ش - // ١٠ - في أثناء : ناقصة - ك - //

١٢ - تذكر : مهلة - ك - يذكر - ش - / ومبدأ : ومبدأ - ش - / إلا إلى : إلى إلى - ك - //

١٥ - ميامين : ميامن - ك ، ش - ش ، ك ، م - // ١٩ - انتظم : كنّا ، والأفضل انتظمت //



بتعريفات خاصة لم أجد بُدّاً منها ولا ينفع الاكتفاء بالتصديرات التي في سائر الكتب الحاسبة عنها ، ووسمتها «بتذكرة الأحياب في بيان التعاب » ، والله المستعان وعليه التكلان .

أما الطريقة فهي هذه :

٥ قالوا : إذا أردنا ذلك حصلنا عدداً من تضاعيف الاثنين ، وزدنا عليه نصفه إلا واحداً ، ونسمي المبلغ الفرد الأول ، ونقصنا من ثلاثة أمثاله واحداً ، ونسمي الباقي الفرد الثاني ، ثم ضربنا أحد الفردين في الآخر ، فما حصل فنسميه الفرد الثالث ، ثم نجمع الأفراد الثلاثة ، ونسمي المبلغ الفرد الرابع . فإن كان كل من هذه الأفراد سوى الثالث أول ضربنا ذلك العدد — الذي من تضاعيف الاثنين — في الفرد الثالث والرابع ، فيكون الحاصلان عددين متحابين ؛ فإن لم تكن الأفراد — سوى الثالث — أوائل حصلنا عدداً آخر من تضاعيف الاثنين تتولد منه الأفراد الأوائل ، ثم عملنا عملنا ، فيُستخرج المتحابان .

وأما الأشكال فستجيء بعد صnderها ، وهو هذا :

### صندر

١٥ كل عدد تولد من ضرب عدد في آخر فلاني أسميه مؤلفاً ثنائياً منهما ، وما تولد من ضرب عدد في عدد ثم في ثالث : ثلاثياً ؛ وما حصل من ضرب الثلاثي في رابع : رباعياً ؛ وعلى هذا .

وكل مؤلف فيما أن تتساوى أضلاعه أو لا ، والأول أسميه المتساوية الأضلاع ، والثاني المتفاضلة الأضلاع ، وهو إما المتفاضلة جميع الأضلاع كالمؤلف من آ ب ج أو المتفاضلة بعض الأضلاع كالمؤلف آ ب ب .

١ - خاصة : ناقصة - ك - / يقع : متفع - م - مهمل - ك - / بالتصديرات - بالتصويرات - ش - / حائر : ناقصة - م - ، ك - // ٨ - كان : ناقصة - ك - // ١٥ - متحابين : محابين - م - / فإن : وإن - ش - // ١٢ - الأوائل : ناقصة - م - أوائل - ك - // ١٣ - فتنجي : فنجي - ك - فني - ش - / بعد : ناقصة - ش - // ١٦ - ثم في : ناقصة - ش - // ١٨ - المتساوية : الصواب "المتساوي" وكذا ما بعده "المتفاضل" ، ونقتصر على هذه الإشارة . ويجوز أيضاً المتساوية أضلاعه // ١٩ - وهو - الأضلاع : ناقصة - م - //



الأوائل بعضها في بعض . وإلا عملنا عمَلنا إلى أن ينحلّ الضلع المركب آخر الأمر إلى ضلعين أولين ، فيكون آ مركباً من الأوائل السابقة مع ذينك الأولين .

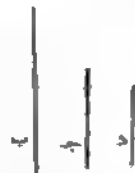


وإن لم ينحلّ إلى ضلعين أولين أبداً ، لزم تأليف المتناهي من ضرب أعداد غير متناهية ، بعضها في بعض ، وهو محال ؛ وذلك ما أردناه .

ب

إذا كانت ثلاثة أعداد ، وليكن  $ا ب ج$  ، فإن نسبة الأول إلى الثالث مؤلفة من نسبه إلى الثاني . ومن نسبة الثاني إلى الثالث .

فليكن مربع  $ب ه$  وسطحه في  $ا د$  وفي  $ج ز$  ، فلأن  $د$  مركب - ضلعا  $ا ب$  - و  $ز$  مركب - ضلعا  $ب ج$  - تكون نسبة  $د$  إلى  $ز$  مؤلفة من نسبي  $ا$  إلى  $ب$  و  $ب$  إلى  $ج$  بشكل  $ه$  من مقالة  $ح$  ، ولأن  $ب$  ضرب في نفسه وفي  $ا$  فحصل  $ه$  تكون نسبة  $ا$  إلى  $ب$  كنسبة  $د$  إلى  $ه$  بشكل  $ي ح$  من مقالة  $ر$  ، وكذلك نسبة  $ب$  إلى  $ج$  كنسبة  $ه$  إلى  $ز$  . فبالمساواة : نسبة  $ا$  إلى  $ج$  كنسبة  $د$  إلى  $ز$  المؤلفة من النسبتين ، وذلك ما أردناه .



١ - عملنا - ناقصة - ش - // - ٤ - وذلك ما أردناه : ناقصة - ٥ - م - // - ٨ - وسطحه : أي سطح  $ب$  في  $ا$  . // - ١٠ - من مقالة  $ح$  : المقصود من أصول أوقليس ، ولن يشير إلى ذلك مرة أخرى إلا إذا غرض الأمر . // - ١٢ -  $ز$  :  $ط$  - ش - //

ج

نسبة الواحد إلى كل مركب مؤلفة من نسبه - إلى كل من أضلاعه الأوائل .

فليكن المركب آ وأضلاعه الأوائل : أما أولاً فاثني هما ب ج ، فنقول : لأن ب ضرب في ج فحصل ا تكون نسبة ب إلى آ كنسبة الواحد إلى ج . ونسبة الواحد إلى ا متألقة من نسبي الواحد إلى ب و ب إلى آ ؛ فنسبة الواحد إلى ا مؤلفة من نسبه إلى ب وإلى ج .

ولیکن الأضلاع أكثر من اثنين وهي ب ج د ، والمؤلف من ب في ج ه . فلأن آ مؤلف من ه في د تكون نسبة الواحد إلى آ مؤلفة من نسبه إلى ه و د . ونسبة الواحد إلى ه مؤلفة من نسبه إلى ضلعيه ، أعني ب ج ، فنسبة الواحد إلى آ مؤلفة من نسبه إلى ب و ج و د . وعمل ذلك فبين إن كانت الأضلاع أكثر من ثلاثة ؛ وذلك ما أردناه .



٢ - هـ هنا تنهى المخطوطة عن //

٦ - إلى ا : (كافية) ناقصة - م - //

١١ - نجد بجوار هذا الشكل الرسمين التاليين في ك و م . ولم نحفظ بالنسب نفسها في كل الأحوال ، التي لم يتقيد بها السامع وأيضاً المؤلف في أغلب الظن حتى لا يشغل بعض الرسوم حيزاً كبيراً . ولن تشير إلى هذا مرة أخرى .

د

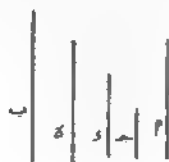
كل مركبين متحدي الأضلاع فهما متماثلان .

ك آ ب المركب كل منهما من أضلاع ج د ه ، وذلك لأن نسبة الواحد إلى كل منهما هي النسبة المؤلفة من نسبه إلى كل من ج د ه ، فنسبتا الواحد إليهما متساويتان ، فهما متماثلتان ، وذلك ما أردناه .

هـ

كل مركبين متفاضلين فهما ليسا بمتحدي الأضلاع .

بل لا بد وأن تكون أضلاع أحدهما الأوائل مخالفة لأضلاع الآخر - إما في بعضها ويكونان متفاضلي الأضلاع ، أو في عدة تكرير بعضها ويكونان متماثلي الأضلاع - وإلا فيكونان بمتحدي الأضلاع فيكونان متماثلين ، وقد فرض التفاضل . هذا خطف ، وذلك ما أردناه .



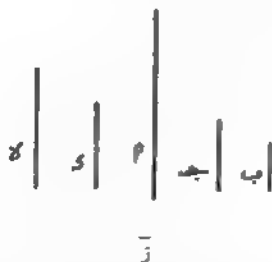
و

كل مركب حلل إلى أضلاعه الأوائل فإن المؤلفة من تلك الأضلاع الثنائية والثلاثية وغيرهما ، إلى المؤلفة السمية لعدد الأضلاع إلا واحداً ، كلها أجزاء له .

فليكن المركب آ ولتحلله إلى ب ج د ه الأوائل ، فأقول < إن المؤلف من ب ج بعد آ لأنه إذا ألف < مع > المؤلف من د ه حصل ا ، فهو بعده . وكذلك سائر الثنائية والثلاثية . وليس المؤلف السمي لعدد الأضلاع بجزء له ، إذ

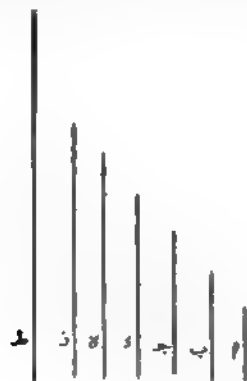
١٠ - بمتحدي : متحدي - ك - // ١٥ - أجزاء : أجزاء - م - // ١٦ - ولنحلله : ولنحلل  
 م - // ١٧ - من ب - المؤلف من : كتبها ناسخ كفي الماشق //

هو ليس أقل منه [ ولا المؤلف السمي لعدد الأضلاع بجزء له إذ هو ليس أقل منه ] ولا المؤلف السمي لعدد أكثر من / الأضلاع ، إذ هو غير ممكن لعدم ١٣٢ ظ الضلع الزائد ، فثبت المطلوب ، وذلك ما أردناه .



إذا لم يعد عدد عددًا لم يعد مربعه ، [ ولا شيء من أجناسه ] ولا شيء من أجناسه الأبعد ، سطحه فيه ، ولا مكعبه ولا أجناسه الأبعد سطح مربعه > فيه ، ولا مال ماله ولا أجناسه الأبعد سطح مكعبه فيه ، وعلى هذا القياس .

فليكن آ غير عاد آب ، وليكن ج مربع آ و ه مكعب و ح مال ماله و د سطح ب في آ و ز سطح ب في ج و ط سطح ب في ه > فأقول إن ج ولا شيء من أجناسه الأبعد د ، ولا ه ولا أجناسه الأبعد ز ، ولا ح ولا أجناسه



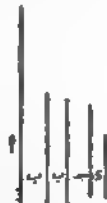
الأبعد يعدّ ط < ، وذلك لأنّ آ ضرب في نفسه وفي ب فحصل ج د ، فنسبة ج إلى د كنسبة ا إلى ب بشكل يح من مقاله ز من الأصول . و آ لا يعدّ ب ف ج لا يعدّ د ، وكذا هـ وح وسائر الأجناس الأبعد ، لأنّ واحداً منها لو عدّ د و ر يعدّ ذلك الجنس ، ف ج يعدّ د ، هذا خلف . وكذا ج ضرب في آ ب فحصل هـ ز ، فنسبة هـ إلى ز كنسبة ا إلى ب فهـ أيضاً لا يعدّ ز ، وكذا ح والأجناس الأبعد . ومثله نبيّن أنّ ح والأجناس الأبعد لم يعدّ ط ؛ وذلك ما أردناه .

### ح

إذا حلل مركب إلى أضلاعه الأوائل ، ولم يتكرر عدد منها لم يعده مربع ذلك العدد ولا واحداً من أجناسه ، وإن تكرر مرةً فقط عدّة من أجناسه مربعه فقط دون البواقي ، وكذا إن تكرر مرتين فقط عدّة منها مربعه ومكعبه دون البواقي ؛ وعلى هذا :

فليكن المركب آ وقد حلل < إلى > أضلاعه الأوائل وهي ب ج د ، فأقول إنّ ب مثلاً لم يتكرر فيها لم يعدّه مربعه ، وذلك لأنّ ب يابن ج و د فيابن سطح ج في د أيضاً بشكل كد من مقالة ز . وب قد ضرب في نفسه وفي سطح ج في د فحصل مربعه و آ . فالربع لم يعدّ آ بشكل كه من مقالة ز ، وبطريق الأولى آ لا يعدّ آ سائر أجناسه .

وأيضاً : ليتكرر ب فيها مرةً فقط ، وليكن الأضلاع ب ج د . فظاهر



- ١ - و ١ - ج - ك - م - // ٨ إلى : من - ك - م - / ل : فلم - ك - م - //  
 ١٢ - يتكرر : تكرور - ك - / يابن : مهلة - ك - م - // ١٤ - قد : ناقصة - م - //  
 ١٦ - ألا : ألا - ك - م - هكذا كتبت في كل النص ولا تشير إليها مرة ثانية . //

أن مربعه الذي هو أحد ثنائها يعده . أقول : لكن لا يعده مكعبه ، لأن  $\bar{ب}$  لم يعد سطح ج في د كما مر ، وقد ضرب مربعه فيها فحصل مكعبه و  $\bar{آ}$  على نسبتها فالمكعب لا يعد  $\bar{آ}$  ، والأجناس الأبعد أولى بالاعتداله .

ولو كان التكرار مرتين ، كما لو كانت  $\bar{ب} \bar{ب} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$  ، عد  $\bar{آ}$  مربع  $\bar{ب}$  ومكعبه دون البواقي ، لأن  $\bar{ب}$  لم يعد سطح ج في د وضرب فيها مكعبه ، فحصل مال ماله و ١ على تلك النسبة ، فمال ماله لم يعد  $\bar{آ}$  ، وكذا سائر أجناسه الأبعد ؛ وذلك ما أردناه .



ط

كل مركب حلل إلى أضلاعه الأوائل فإنه لا يوجد له جزء سوى الواحد وأضلاعه الأوائل والمؤلفة من أضلاعه الثنائية أيضاً إن كانت أكثر من اثنين ، والثلاثية أيضاً .. إن كانت أكثر من ثلاثة وهلم جرا ، إلى أن تنتهي إلى المؤلفة السميّة لعدد الأضلاع إلا واحداً .

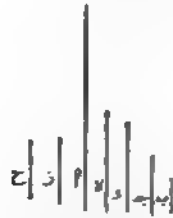
فليكن  $\bar{آ}$  مركباً ولنحلّه إلى أضلاعه الأوائل وهي  $\bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$  ، فأقول : ليس له جزء سوى الواحد ، و  $\bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$  ، والمؤلفة من  $\bar{ب} \bar{ج} \bar{د} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$  ده الثلاثية ، والمؤلفة من  $\bar{ب} \bar{ج} \bar{د} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$  ده الثلاثية ، وهي السميّة لعدد الأضلاع إلا واحداً .

وفذلك لأنه لو أمكن أن يكون له جزء غير ما ذكر فليكن  $\bar{ر}$  ، وهو إما

١ - هو : كررت قوة ١ - م - / أحد ثنائها : واحد ثنائها - ك - كتب النسخ بعلها « ثنائها »  
ثم كتب فوق « ثنائها » : « ما » . // ٢ - تعده : تعد - ك ، م - // ١١ - المؤلفة .  
المؤلف - ك ، م - // ١٣ - ولنحلّه : ولنحل - ك ، م - // ١٤ - له : لا - م - //



- أول / أو مركب . فإن كان أول ويعدّ المؤلف من بَ حَ دَ في هَ فلا بد وأن ١٣٣-و  
 يعدّ أحد ضلعيه بشكل لَ من مقالة زَ ، ولا يمكن أن يعدّ هَ الأول ، فنزّم أن يعد  
 المؤلف من بَ حَ دَ . ولأنه يعد هذا المؤلف ، وهو مؤلف من المؤلف من بَ جَ  
 في دَ الأول . فباليابان المذكور يلزم أن يعد المؤلف من بَ جَ ، ولأنه يعد هذا  
 المؤلف فيعد أحد ضلعيه الأولين أو يكون أحدهما ، وكلاهما محال . وإن كان  
 دَ مركباً ، وهو مفاضل للمؤلفة المذكورة ، فلا بد وألا يكون أصله الأوائل  
 متحدة بأصلاع من تلك المؤلفة . فلما أن يوجد في أصلاع زَ الأوائل ما لم يوجد  
 في أصلاع آ أو لا . فإن لم يوجد فلما أن يكون ضلع من أصلاع زَ فيها بعدة  
 لم يتكرر مثلها في أصلاع آ ، أو يتكرر ضلع من أصلاع آ فيها بعدة لم يتكرر  
 ١١ مثلها في أصلاع زَ . وهذه ثلاثة أقسام .



فإن كان الأول ، فليكن ذلك الأول المفاضل لجميع أصلاع آ ح . فح  
 أول ويلزم الخلف المذكور إذ فرض زَ أول .

- وإن كان الثاني . وهو أن يكون ضلع من أصلاع زَ ، وليكن بَ  
 مكرراً ، وليكن مرة ، ولا يكون بَ مكرراً في أصلاع آ . فالمؤلف من بَ  
 في مثله يعدّ زَ ، وهو يعدّ آ وهو غير مكرر في أصلاع آ ، هذا محال . ١٥

ويمثل ذلك تبين الخلف لو كان مكرراً مرتين أو أكثر . وليكن بَ  
 مكرراً في أصلاع زَ مرتين وفي أصلاع آ مرة ، فيلزم أن يعدّ زَ <مكعب بَ>  
 فمكعب بَ يعدّ آ ، وهو لم يتكرر في أصلاعه أكثر من مرة ، هذا خلف .

ويمثل ذلك تبين الخلف كلما كان عدة تكرّر بَ في أصلاع زَ أكثر من

$$٢ - لَ : لَب - ك - م - / يعدّ هَ : يعدّ - ك - م - //$$

عدته في أضلاع آ . وإن كان الثالث ، أعني أن تكون بعض أضلاع آ مكرراً فيها بعدة لم يتكرر بمثلها في أضلاع ز ، فيسَّ أن ز حيثذ يكون أحد أجزاء < ١ > المؤلف . فالحكم ثابت ، وذلك ما أردناه .

ي

- كل زوج فهو مركب ، إلا اثنين .  
لأنه يعده نصفه ، والاثنين أيضاً .

بأ

كل فرد فهو إما فرد من الآحاد ، أو مركب أحد مفرداته < فرد > من الآحاد .

- ١٠ لأن العدد إما أن يكون من الآحاد أو لا ، والثاني إما أن يكون مفرداً أو لا ، والثاني إما أن يكون مركباً أحد مفرداته < فرداً > من الآحاد أو لا شيء من مفرداته < فرد > من الآحاد . فإن لم يكن الفرد من القسم الأول < ولا > من الثالث ، فلما أن يكون من الثاني أو < من > الرابع . فإن كان مفرداً من غير مرتبة الآحاد فهو زوج ، إذ العشرة الي هي زوج تعد كل مفرد من غير مرتبة الآحاد ، وإن كان مجتمعاً من تلك الأعداد المفردة ، فيكون زوجاً أيضاً بشكل كما من مقالة ط . وكلاهما خلف ؛ وذلك ما أردناه .

يب

الخمسة تعد كل مركب أحد مفرداته خمسة .

- ٢٠ لأنها تعد كل مفرد ليس من الآحاد ، فتعد نصفه الذي هو جميع تلك المفردات وتبقى خمسة ، فتعدها أيضاً ، فتعد ذلك المركب .

٨ - فهو : في الهامش - ك - / من الآحاد : أي من مرتبة الآحاد . // ١٠ - والثاني : أي العدد الذي من غير مرتبة الآحاد . // ١١ - والثاني : أي هذا الأخير . // ١٢ - القسم الأول : أي مفرد من مرتبة الآحاد . // ١٣ ، ١٤ - من الثالث : ١ م لثالث - م - أي مركب أحد مفرداته فرد من الآحاد . // ١٣ - أو : ١ م - م - // ١٤ ، ١٥ - فهو زوج - مرتبة الآحاد : ناقصة - م - // ١٤ - تعد - يعد - ك - // ١٨ - كل : ناقصة - م - // ١٩ - تعد نصفه : فيعد نصفه - ك - // ٢٠ - فتعدها : فيعد - ك - //

يـجـ

كل عدد يعده الخمسة فهو إما خمسة ، أو مفرد ليس من الآحاد ، أو مركب منها فقط ، أو مركب من مفردات أحدها من الآحاد وهو خمسة .

إد لو عدت غيرها فإما مفرداً من الآحاد غير الخمسة وهو محال ، أو مركباً من مفردات أحدها من الآحاد وهو غير الخمسة ، فيعد الخمسة ذلك العدد وتعد جميع مفرداته سوى ذلك المفرد من الآحاد ، فتعد ذلك المفرد الباقي ، وهو محال ؛ وذلك ما أردناه .

يـدـ

أقل عدد <مركب> يعده أحد أعداد مفروضة متفاضلة كأعداد ا ب ج هو مربع العدد الأقل . ١٠

وليكن آ أقلها ثم ب . ولأن معلوداتها إما أن تكون آحاد سلسلة كل منها أو مؤلفات بعضها مع بعض ، ولأن المؤلف بنفسه / أقل من المؤلف بما ١٣٣-ظ هو أعظم ، وأقل أفراد السلسلة مربعة ، وأقل المربعات مربع آ ، فمربع آ أقل <من> مؤلفه بالباقيين وأقل من سائر آحاد سلسلته ومن جميع آحاد سلسلتي الباقيين ، فهو أقل من كل عدد يعده أحد الثلاثة ؛ وذلك ما أردناه . ١٥

ا | ب | جـ

وقد استبان من ذلك أن أقل عدد أصم مركب هو مربع أحد عشر ، أعني مائة وأحداً وعشرين ، لأن أقل الأعداد الصم أحد عشر .

٢ - أحدها : بعضها - ك ، م - // ٣ - فإما : إما - ك ، م / غير : عن - ك ، م - //

٥ - أحدها : بعضها - ك ، م - // ٩ - يعده : تعدد - ك - // ١١ - ولأن : لأن - ك ، م / تكون . يكون - ك //

١٤ - سلسلته : سلسله - ك ، م // ١٦ - أصم : المقصود بالعدد الأصم هنا كل عدد أول من مرتبة العشرات على الأقل . //

به

نريد أن نتعرف أن عددا ما - وليكن آ - هو أول أو مركب ، وإن كان مركبا فكيف يحلل إلى أضلاعه الأوائل ؟

فينظر : فإن كان زوجا غير الاثنين فهو ليس بأول ، وإن كان فردا فهو إما مفرد من الآحاد أو مركب أحد مفرداته من الآحاد . فإن كان مفردا من الآحاد فهو أول غير التسعة ، وإن كان مركبا وأحد مفرداته من الآحاد ، فذلك المفرد إن كان خمسة فهو ليس بأول وإن كان واحداً أو ثلاثة أو سبعة أو تسعة أمكن أن يكون أول . فإن عده الثلاثة أو السبعة فهو ليس بأصم وإلا فهو أصم لكون الأزواج من الآحاد غير عادة له - وإلا لكان زوجا بشكل كما من مقالة ط - وهو فرد - والثلاثة والخمسة والسبعة من الأفراد غير عادة له أيضاً وكذا التسعة - > وإلا < لعدته الثلاثة > التي < تعد العاد - .

وما لم يعده المخارج التسعة فهو أصم ، فإن كان أقل من مائة وأحد وعشرين فهو أول ، لأنه لم يعده شيء من الأعداد المنطقية و < لا > الصم ولا المشتركة < منهما > وإلا لعدته الأوليان . وإن كان أكثر فنقسمه على مربع الأحد عشر ، فإن انقسم أو بقي < بقية > تعدها الأحد عشر فهو ليس بأول لأن الأحد عشر تعده ، وإلا فنقسمه على مربع العدد الثاني من الأعداد الصم وهو ثلاثة عشر ، فإن انقسم أو عد الثلاثة عشر البقية فليس بأول ، وإلا فنقسمه على مربع الثالث من الصم وكذا الرابع والخامس على الولاء إلى ألا يبقى أصم يمكن أن يقسم على مربعه . فإن لم يعده واحد من هذه الأعداد الصم أيضاً فهو أول ، لأن آ حيثئذ لا يعده شيء من الأعداد المنطقية < والصم > والمشاركة وإلا لعدده أحد المخارج هذا خلف ؛ ولا واحد من الأوائل الصم ، الذي يمكن أن يأتي مربعه منه - وقد تبين - ولا واحد من الأعداد الصم الأعظم منها - إذ لو عد ١ بعض منها لعدده

١ - عددا : اعدا - ك ، م - // ٣ - فهو : وهو - ك ، م - // ٦ - وإن كان ... من الآحاد . بعد أن كتبها باسم م أعادها كنك "فذلك المفرد إن كان مركبا وأحد مفرداته من الآحاد" . // ١١ - العاد : في هامش - ك - // ١٣ - الصم - الأصمة - ك ، م - // ١٩ - يعده : كرر فاسم م لها . // ٢١ - الذي : التي - ك ، م - //

بأقل من نفسه فيكون بأخذ الثلاثة المذكورة ، فيكون الأقل عاداً أيضاً ، هذا خلف .

واعلم أنه لا حاجة في القسمة على مربعات الصم إلى القسمة على مربعات أعداد صم مركبة ، إذ العلم بأن أضلاعه غير عادة له يفيدك أن السطح غير عاد ، وإلا لعدده أضلاعه — هذا خلف .

وأما طريق استخراج الأضلاع الأوائل إذا كان مركباً فهو أن تقسمه على عدد ينقسم عليه ، فإن كان المقسوم عليه والخارج أوليين فهما المطلوب ، وإن كان أحدهما أو كل منهما مركباً نعمل به ما عملنا بالعدد أولاً إلى أن تنتهي إلى قسمة يكون الخارج والمقسوم عليه أوليين ، فيكون مركباً من الأعداد الأوائل الواقعة في قسمة قسمة ويحصل المطلوب ؛ وذلك ما أردناه .

### < ب >

صدر : إذا جمعت الأعداد من الواحد على النظم الطبيعي إلى واحد واحد من الأعداد المتوالية حصلت أعداد متوالية أولها > ثلاثة وثانيها ستة وثالثها عشرة إلى غير النهاية ، ولنسمها المجتمعات الأولى ؛ وإذا جمعت الأعداد من الواحد إلى واحد واحد من المجتمعات الأولى حصلت أعداد متوالية أولها < أربعة وثانيها عشرة ثم عشرون وخمسة وثلاثون إلى غير النهاية ، ولنسمها المجتمعات الثانية ؛ وإذا جمعت من الواحد إلى واحد واحد من المجتمعات الثانية حصلت أفراد المجتمعات الثالثة متوالية ؛ وقسم عليها المجتمعات الرابعة والخامسة إلى غير النهاية .

وقد وضعنا جدولاً أثبتنا فيه عشرة من أنواع المجتمعات ومن كل عشرة من أعدادها ليسهل إصابتها على الطلاب وليكون مثلاً لمن أراد استخراج ١٢٤- و غيرها منها ، وهذا هو الجدول .

٧ - فهما : ٢ - ٨ - نعمل : يعمل - ٥ - ١٢ - صدر : ناقصة - ٣ - //  
١٤ - وإذا : إذا - ٥ - ٣ - ٢٠ - فيه : فيها - ٥ - ٣ - وهو أيضاً صحيح إلا أنه  
أخذ بصيغة المذكور فيما بعد . //

المجموعات أعدادها										
	العاشر	التاسعة	الثامنة	السابعة	السادسة	الخامسة	الرابعة	الثالثة	الثانية	الأولى
١١	٣٥٢٧١٦	١٦٧٩١٠	٧٥٥٨٢	٣١٨٢٤	١٢٢٧٦	٤٣٦٨	١٣٦٥	٣٦٤	٧٨	١٢
١٠	١٨١٧٥٦	٩٢٢٧٨	٤٣٧٥٨	١٩٤٤٨	٨٠٠٨	٣٠٠٣	١٠٠١	٢٨٦	٦٦	١١
٩	٩٢٣٧٨	٤٨١٢٠	٢٤٣١٠	١١٤٤٥	٥٠٠٥	٢٠٠٢	٧١٥	٢٢٠	٥٥	١٠
٨	٤٣٧٥٨	٢٤٣١٠	١٢٨٧٠	٦٤٣٥	٣٠٠٣	١٢٨٧	٤٩٥	١٦٥	٤٥	٩
٧	١٩٤٤٨	١١٤٤٥	٦٤٣٥	٣٤٣٢	١٧١٦	٧٩٢	٣٢٠	١٢٠	٣٦	٨
٦	٨٠٠٨	٥٠٠٥	٣٠٠٣	١٧١٩	٩٢٤	٤٦٢	٢١٠	٨٤	٢٨	٧
٥	٣٠٠٣	٢٠٠٢	١٢٨٧	٧٩٢	٤٦٢	٢٥٢	١٢٦	٥٦	٢١	٦
٤	١٠٠١	٧١٥	٤٩٥	٣٣٠	٢١٠	١٢٦	٧٠	٣٥	١٥	٥
٣	٢٨٦	٢٢٠	١٦٤	١٢٥	٨٤	٥٦	٣٥	٢٠	١٠	٤
٢	٦٦	٥٥	٤٥	٣٦	٢٨	٢١	١٥	١٠	٦	٣
١						+				٢

في الجدول : كتب بدل " الأولى ، الثانية - الخ " في السطر الأول : الأول ، الثاني ... الخ  
هناك ثلاثة أخطاء في الجدول في " م " وهي من أخطاء النسخ لأن الرقم الذي يتبع ما يتضمن الخطأ  
فهو صحيح ، ولقد أشرنا إليها بـ ٥٠ ، وهي على التوالي : ٢٩٤ ، ٤٢٧٥٨ ، ٩٢٢٧٩ . وكذلك  
هناك ثلاثة أخطاء من النسخ في " ك " ، وأشرنا إليها بـ + ، وهي على التوالي : ٣٥ ، ٥٠٠٢ ،  
٤٢٧٥٩ .



لعدد الأضلاع إلا أعداد التأليف أعني اثنين - وهي المئة الأولى من المجتمعات السمية لعدد التأليف إلا واحداً / ، أي الأولى ، والتي يوجد فيها ١٣٤  
 د من غير . فيكون الضلع الآخر منها أحد آ ب ج الثلاثة الباقية ، فهي ثلاثة أيضاً ؛ فالمؤلفة الثانية < من آ ب ج د > ستة . على القاعدة المذكورة ؛ والتي يوجد فيها ٥ فيكون الضلع التالي أحد آ ب ج د الأربعة الباقية ، فهي أيضاً أربع ؛ فالمؤلفة < الثانية > من هذه الخمسة عشر وهي من المجتمعات الأول في المرتبة الثالثة ، وهي سمية لعدد الأضلاع إلا أعداد التأليف .

ولكن الأضلاع آ ب ج د ه ز فالثلاثة منها لا تخلو إما أن يكون أحد أضلاعها ز أو لا ، والثاني إما أن يكون أحدها ه أو لا ، والثاني - أعني التي تكون مؤلفة من آ ب ج د الأربعة فقط - فلا بد ولا يوجد منها واحد فقط من الأربعة ، فهي أربعة ، أي الأول من المجتمع الثانية ، والتي يوجد فيها ٥ من غير ز فيكون الضلعان الباقيان من كل منها ضلعي أحد المؤلفة الثانية من الأضلاع الباقية - أعني آ ب ج د - وهي ست ، فهذه أيضاً ست . فالثلاثة من آ ب ج د ه [ ز ] الخمسة عشر ، والتي يوجد فيها ز فضلعاً كل منها الباقيان ضلعاً أحد من المؤلفة الثانية من ١ ب ج د ه الخمس الباقية وهي عشر ، فهي الثلاثة أيضاً < وهي > عشر . فالثلاثة من آ ب ج د ه ز عشرون وهي من المجتمعات الثانية . التي هي سمية لعدد التأليف إلا واحداً - في المرتبة الثالثة التي < هي > سمية لعدد الأضلاع إلا أعداد التأليف . وإن كانت الأضلاع متفاضلة ، بعضها ، ومتساوية ، بعضها ، فنستخرج المؤلفة على القانون المذكور ثم نلقي المكررة وتكون الباقية سائر الأجزاء ؛ وذلك ما أردناه . ٢٠

وقد وضعنا بعض المؤلفات مع أجزائها ، وأمثلة في هذه الجداول ليؤخذ منها ما يوجد فيها ويكون أمثلة لما عدها / .

١٣٥-و

١ - إلا أعداد : الأعداد - ٥ ، م - // ٣ فهي : وهي - م - // ٤ - ستة . تأنيث العدد هـ جاز ، وهو يأخذ بانفاعتين معاً كما سقى ، ولهذا متروك النسخ كما هو . // ٥ - أنثى : الثاني - ٥ - / فهي وهي - م - // ٧ - إلا أعداد : الأعداد - ٥ ، م - // ٨ - يكون : ناقصة - م - // ١٤ - الخمسة : الخمسة - م - // ١٧ - الثانية : الثانية - ٥ ، م - // ١٨ - إلا أعداد : الأعداد - ٥ ، م - // ٢١ الجداول : لم يتصل ناسخ م هذه الجداول وفرك فراغاً صغيراً . وسيداً بحلولة م من منتصف هذه الجداول كما ستشعر لهذا . وفي هذا الجدول الكثير من أعطاء النسخ كما هو الحال في مثل هذه الجداول ، ولقد صحتنا هذه الأخطاء .



المؤلف الثاني			<المؤلف> الأساسي			المؤلف الثاني		
الأصلع	عدد	الأشلة	الأصلع	عدد	الأشلة	الأصلع	عدد	الأشلة
١١	٢	٤	١١	٦	٦٤	١١	٨	٢٥٦
اب	٣	٦	١١	١١	٩٦	١١	١٥	٣٨٤
الثلاثي			١١	١٤	١٤٤	١١	٢٠	٥٧٦
١١	٣	٨	١١	١٩	٢٤٠	١١	٢٧	٩٦٠
١١	٥	١٢	١١	١٥	٢١٦	١١	٢٣	٨٦٤
اب	٧	٣٠	١١	٢٣	٣٦٠	١١	٣٥	١٤٤٠
الرابعي			١١	٣١	٨٤٠	١١	٤٧	٣٣٦٠
١١	٤	١٦	١١	٢٦	٩٠٠	١١	٢٤	١٢٩٦
١١	٧	٢٤	١١	٣٥	١٢٦٠	١١	٢٩	٢١٦٠
١١	٨	٣٦	١١	٤٧	٤٦٢٠	١١	٤٤	٣٦٠٠
١١	١١	٦٠	١١	٦٣	٣٠٠٣٠	١١	٥٩	٥٢٠٠
اب	١٥	٢١٠	السادسي			١١	٧٩	١٨٤٨٠
الغلامي			١١	٧	١٣٨	١١	٤٧	٥٤٠٠
١١	٥	٣٢	١١	١٣	١٩٢	١١	٦٣	٧٥٦٠
١١	٩	٤٨	١١	١٧	٢٨٨	١١	٧١	١٢٦٠٠
١١	١١	٧٢	١١	٢٣	٤٨٠	١١	٩٥	٢٧٧٢٠
١١	١٥	١٢٠	١١	١٩	٤٣٢	١١	١٢٧	١٢٠١٢٠
١١	١٧	١٨٠	١١	٢٩	٧٢٠	١١	٨٠	٤٤١٠٠
١١	٢٣	٤٢٠	١١	٣٩	١٦٨٠	١١	١٠٧	٦٩٣٠٠
١١	٣١	٢٣١٠	١١	٣١	١٠٨٠	١١	١٤٣	١٨٠١٨٠
			١١	٣٥	١٨٠٠	١١	١٩١	١٠٢١٠٢٠
			١١	٤٧	٢٥٢٠	١١	٢٥٥	٩٦٩٩٦٠
			١١	٦٣	٩٢٤٠			
			١١	٥٣	٦٣٠٠			
			١١	٧١	١٣٨٦٠			
			١١	٩٥	٦٠٠٦٠			
			١١	١٢٧	٥١٠٥١٠			

ترك ناسخ «م» فراعاً لهذه الجداول ولم ينقلها من الأصل ، ووقع ناسخ «ك» وكذلك ناسخ «خ» - في الجزء الموجود من هذه النسخة - في أخطاء عديدة . وأهمية هذه الأخطاء هي عند مقارنة المخطوطتين فقط ، وهذا ما قمنا به . وصححناها هنا دون الإشارة لصعوبة ذلك ، فإنباتها في أسفل النص المحقق لا يمكن إلا بإعادة الجداول عدة مرات ، والنتيجة المرفقة لا تستحق هذا العناء ولا هذه التكلفة :

١٣٥

المؤلف السامي		<الأصلاخ المؤلفة>		<عدد> الأجزاء		<الأشلة >	
الأصلاخ المؤلفة	<عدد> الأجزاء	الأشلة	أ ب ج د هـ	٢١٥	<٩٠٠٩٠٠>		
أ ب ج د هـ	٩	٥١٢	أ ب ج د هـ و ز	٢٨٧	<٢٨٦٨٥٨٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح	١٧	٧٦٨	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٢٨٢	<١٩٣٩٩٣٨٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٢٢	١١٥٢	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٥١١	<٢٢٢٢٢٢٢٢٢٢>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٣١	١٩٢٠	/ المؤلف المشاري				
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٢٧	١٧٢٨	الأصلاخ المؤلفة	<عدد> الأجزاء	الأشلة		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٤١	٢٨٨٠	أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٠	<١٠٢٤>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٥٥	٦٧٢٠	أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٩	<١٥٣٦>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٢٩	٢٥٩٢	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٢٦	<٢٢٠٤>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٤٧	٤٣٢٠	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٣٥	<٢٨٤٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٥٢	٧٢٠٠	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٣١	<٢٤٥٦>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٧١	١٠٠٨٠	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٤٧	<٥٧٦٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٩٥	٣٩٩٦٠	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٦٣	<١٢٤٤٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٤٩	٦٤٨٠	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٢٤	<٥١٨٤>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٥٩	١٠٨٠٠	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٥٥	<٨٦٤٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٧٩	<١٥١٢٥>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٦٢	<١٤٤٠٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٨٩	<٢٥٢٠٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٨٢	<٢٠١٦٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	١١٩	<٥٥٤٤٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	١١١	<٧٣٩٢٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٥٩	<٥٤٠٥٤٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٣٥	<٧٧٧٦>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٦٣	<٢٧٠٠٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٥٩	<١٢٩٦٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٩٥	<٣٧٨٠٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٧١	<٢١٦٠٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٢٧	<٨٣١٦٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٩٥	<٢٠٢٤٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٠٧	<٨٨٢٠٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٠٧	<٥٠٤٠٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٤٣	<١٣٨٦٠٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٤٣	<١١٠٨٨٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٩١	<٣٦٠٣٦٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٩١	<٤٨٠٤٨٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	٢٥٥	<٢٠٤٢٠٤٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٧٤	<٢٢٢٤٠٠>		
أ ب ج د هـ و ز ح ط	١٦١	<٤٨٥١٠٠>	أ ب ج د هـ و ز ح ط	٩٩	<١٥١٢٠>		



إذا ضُرب عدد مركب في عدد أول ، فإن لم يكن المضروب فيه أحد أضلاع المركب الأوائل ، كان مجموع أجزاء السطح مثل مضروب أجزاء المركب مجتمعة في ذلك الأول مع المحتمع من أجزاء المركب مع المركب .

فليكن ١ مركباً و ب أول غير الأوائل التي يحل إليها آ وسطهما ج ، وليكن جميع أجزاء آ : د ، وهو مع آ : هـ .

فأقول : إن جميع أجزاء ج مثل د في ب مع هـ .

وذلك لأن مجموع أجزاء آ : د ، وكل منها جزء ج ، وآ أيضاً جزء هـ ، وكل واحد من سطوح ب في كل من أجزاء آ جزء له أيضاً .

فأقول : ولا يوجد له جزء غير ما ذكر .

وإلا فليكن ط غير هـ . فهو إما أول أو مركب . فإن كان أول ، وهو يعد جزء المؤلف من آ في ب ، و ب أول ، فلا بد وأن يعد آ ، فيكون واحداً من أجزاء ١ غير ما ذكر ، وقد انحصرت فيها ، هذا خلف .

وإن كان مركباً ، فلما أن يعد هـ أول غير الأوائل التي تعد ج ، أو يتكرر في أضلاعه الأوائل ضلع لم يتكرر بتلك العدة في أضلاع ج ، أو بالعكس . وإلا لكان ط واحداً من المؤلفات المذكورة التي هي أجزاء ج . فإن عده أول غير ما ذكر كان ذلك الأول عاداً لـ ج ، ويتبين الخلف بمثل ما مر غير مرة . وإن تكرر في أضلاعه < الأوائل > ضلع لم يتكرر بتلك العدة في أضلاع ج - وليكن ح - عده ط حنس من أجناس ح في المراتبة السمية لعدة تكرره ، فيعد ج أيضاً . وتبين بالبيان المذكور في المقدمة السادسة والسابعة أن ذلك محال . وإن تكرر

- ١ - يح : يز - كوخ - ناقصة - م - // ٥ - وسطهما : وسطهما وسطهما - ك - //  
 ٧ - جزم - م - // ٨ - وآ أيضاً جزؤه : وإيضاً جزؤه - ك - م - // ٩ - له : القصور يعود  
 على ج . // ١٠ - فأقول : أقول - ك - // ١١ - كان أول : أول - ناقصة - ك - وفي  
 هاشخ // ١٤ - تعد : يمد - خ ، ك - يمد - م - // ١٦ - هي : ناقصة - خ ، م - //  
 ١٧ - بمثل : فمثل - م - // ١٧ ، ١٨ - وإن تكرر - لم يتكرر : وإن لم يكن في أضلاعه  
 ضلع لم يتكرر - ك - // ١٩ - ح - ج - م - // ٢٠ - أن : ناقصة - م - / محال : محال سم - //



في أضلاع جـ < الأوائل > ضلع لم يتكرر بتلك العدة في أضلاع ط ، فـ أحـ<sup>د</sup>  
أجزاء جـ من المؤلفات المذكورة ، هذا خلف .

فليس لـ جـ سوى ما ذكر < من > أجزاء . وجميع سطوح بـ في كل<sup>د</sup>  
من أجزاء آ مساوٍ لسطح بـ في د ، وإذا أضيف إليه كان الجميع . ولكن  
حـ هي جميع أجزاء جـ .

أقول : ولم يتكرر شيء منها أيضاً : لأن أقسام حـ منحصرة في قسمين :  
سطوح بـ في كل من أجزاء آ ، وسطوح الواحد- الذي < هو > جزء لـ بـ -  
في آ وكل من أجزائه ، أعني هـ . ولا شيء من أقسام الثاني - أعني أقسام هـ -  
بمكرر فيها ، وذلك ظاهر . وكذا لا شيء من أقسام الأول بمكرر فيها إذ هي  
سطوح عدد بعينه - أعني بـ في أقسام د المتفاضلة جميعاً ، فتكون هذه السطوح  
على تلك النسب . وكذا لا شيء من أقسام الثاني مكرر آ في أقسام الأول ؛ إذ لو  
تساوى اثنان منهما لتناسبت أضلاعهما بالشكل التاسع عشر من المقالة السابعة .  
وليكن أحدهما سطح بـ في د والآخر سطح الواحد - أعني جزء بـ في ل ،  
فيكون نسبة الواحد إلى ك مثل نسبة بـ إلى ل ، وبالإبدال نسبة الواحد إلى بـ

٣- سوى : سوى - م / - أجزاء : جـ - خ ، ك ، م - / وجميع : الواو قد تكون فوق السطر  
وهي غير واضحة - ك - // ٤ - آ : ناقصة - م - / هـ : و - م - غير واضحة تماماً - خ - //  
٥ ، ٤ - مساوٍ : أجزاء جـ : ناقصة - ك - // ٦ - ح : م - م - // ٨ - هـ : جزء - م - //  
٩ ، ١١ - وكذا : النسب : ناقصة - خ - م - // ١٢ - منها : منها - خ - م - / لتناسب  
لتناسب - ك - / أضلاعهما : أضلاعها - خ - م - / بالشكل التاسع عشر : بشكل ط - ك - /  
المقالة السابعة : مقالة ر - ك - المقالة الثامنة - خ - // ١٣ - جزء : هـ - م - //

مثل نسبة  $\bar{c}$  إلى  $\bar{a}$  بالشكل الثالث عشر من المقالة السابعة . والواحد بعد  $\bar{b}$  بعدة  $\bar{a}$  واحد  $\bar{b}$  ، ف  $\bar{c}$  بعد  $\bar{a}$  ب  $\bar{b}$  . ولأن  $\bar{c}$  ضرب في  $\bar{b}$  فحصل  $\bar{a}$  ف  $\bar{b}$  بعد  $\bar{a}$  ، فبعد  $\bar{a}$  أيضاً ، فهو من أجزاء الأوائل ، وقد فرض خلافه ، هذا خلف . وإذا لم يتكرر شيء من أقسام  $\bar{c}$  فدح جميع أجزاء  $\bar{c}$  من غير نقصان وزيادة .

< يط >

وإن كان  $\bar{b}$  أحد الأضلاع الأوائل  $\bar{a}$  فجميع أجزاء  $\bar{c}$  بعد  $\bar{a}$  يلقى منه مضروب كل طرفي أربعة متناسبة ، مقدماً ما الواحد و  $\bar{b}$  وتالياها قسمان من أقسام  $\bar{c}$  .

أما وجوب تناسب هذه الأربعة حيثند فيسن . وأقل ما في الباب أن يكون نسبة الواحد - وهو جزء  $\bar{b}$  - إلى الواحد - وهو جزء  $\bar{a}$  - مثل نسبة  $\bar{b}$  إلى  $\bar{b}$  من أجزاء  $\bar{a}$  .

وأما وجوب أن يلقى مضروب طرفي كل أربعة منها ، فلأن أقسام  $\bar{c}$  ، كما ذكرنا آنفاً ، منقسمة إلى سطح  $\bar{b}$  في كل من أجزاء  $\bar{a}$  ، وسطوح الواحد - الذي هو جزء  $\bar{b}$  - في كل من أقسام  $\bar{c}$  .

وليكن تاليا الأربعة المتناسبة  $\bar{c}$  ونسبة الواحد إلى  $\bar{c}$  كنسبة /  $\bar{b}$  إلى ١٣٦ -  $\bar{a}$  ، فمضروب الطرفين مثل مضروب الواسطين بالشكل التاسع عشر من المقالة السابعة ، فقد تكرر بعض أقسام الثاني في الأول فوجب إلغاؤه . فإذا أُلقي جميع

١ - مثل : ناقصة -  $\bar{c}$  - /  $\bar{a}$  -  $\bar{b}$  - بالشكل - السابعة : بشكل  $\bar{c}$  من مقالة  $\bar{a}$  -  $\bar{c}$  - نجد في هامش بجناه الشكل الثالث عشر من المقالة السابعة نص هذا الشكل أي " كل أربعة أعداد فإن كانت متناسبة كان سطح الأول في الرابع كسطح الثاني في الثالث ، وإن كان المسطح كالسطح كانت متناسبة " ثم نجد أيضاً " إذا كانت أربعة أعداد متناسبة وأبدلته كانت أيضاً متناسبة " .  
٢ -  $\bar{c}$  -  $\bar{a}$  -  $\bar{b}$  - /  $\bar{a}$  -  $\bar{b}$  - : زيادة : هناك فراغ في م ترك لرسم المخطوط كما هو مألوف .  
٣ - وتالياها : وتاليا -  $\bar{c}$  - // ٩ - أما : فاما -  $\bar{c}$  - / وأقل ما في : وأقلها -  $\bar{c}$  -  
٤ - جزء :  $\bar{c}$  -  $\bar{a}$  - // ١٠ - إلى  $\bar{b}$  : كررها فاسم  $\bar{a}$  . // ١٢ -  $\bar{c}$  -  $\bar{a}$  -  
٥ -  $\bar{c}$  - // ١٣ - أجزاء : جزء -  $\bar{a}$  - // ١٤ - الذي هو : ناقصة -  $\bar{c}$  -  $\bar{a}$  - في هامش  $\bar{c}$  - / جزء : ضرب -  $\bar{a}$  - // ١٥ - مثل : ناقصة -  $\bar{c}$  -  $\bar{a}$  - / الواسطين : الواسطين -  $\bar{c}$  -  $\bar{a}$  - // ١٦ - بالشكل - السابعة : بشكل يط من مقالة  $\bar{a}$  - ١٧ - تكرر : تكون -  $\bar{c}$  - //

ذلك فَيَبِينُ أنه لم يبق مكرر ، وإلا فلم يلقَ الجميع ، فيكون الباقي من ح -  
وليكن ط - جميع أجزاء ج من غير زيادة ونقصان ، وذلك ما أردناه .

واعلم أنه إذا كان أحد العددين يعد الآخر ، فالأسهل أن تلقى من  
أجزاء آ - أعني د - كل جزء إذا ضرب في ب حصل واحد من تلك الأجزاء ؛  
وهي الواحد وجميع أضلاعه الأوائل التي هي غير ب ، وجميع مؤلفه تلك  
الأضلاع ، الثمانية والثلاثية وغيرهما ، إلا المؤلف من جميع تلك الأضلاع . وإن  
كان ب مكرراً في أضلاع آ الأوائل مرة فيلقى ب أيضاً ، وإن كان مرتين  
فمربعه أيضاً ، وإن كان ثلاثاً فمكعبه أيضاً ، وعلى هذا القياس . ثم يضرب  
الباقي من د في ب ويزاد على الحاصلة فيبلغ أجزاء ج من غير زيادة ونقصان .  
وإنما لم أطل الكلام في بيانه لأن المطلوب غير متوقف عليه .

٥

إذا ضرب عدد مركب في عدد مركب كان جميع أجزاء السطح مثل  
سطح جميع أجزاء المضروب في المضروب فيه مع سطح جميع أجزاء المضروب  
فيه في المضروب مع جميع أجزائه ، إن لم يناسب اثنان من المضروب وأجزائه  
اثنين من المضروب فيه وأجزائه على الولاء ، وإن ناسب فجميع أجزائه هو جميع  
السطحين بعد أن يلقى منه كل من مضروب طرفي أربعة متناسبة

فليكن المركبان ١ ب وسطحهما ج ، وليكن جميع أجزاء آ د ، وهو

١ - يلقى . ببق - خ - م - آ ح : ح - م - // ٢ - وليكن ط : ناقصة - خ - م - / زيادة  
ونقصان : نقصان وزيادة - ك - // ٣ - واعلم .. الآخر : واعلم أنه ب إذا كان أحد  
الأضلاع الأوائل ١ - ك - / الممدين : المركبين - خ - م - / يعد بعد - م - // ٤ - حصل :  
يحصل - خ - م - // ٥ - المؤلف . بالمؤلفه - ك - م - / جميع : ناقصة - م - - أضافها  
ناسخ خ تحت السطر . // ٦ - آ : ناقصة - م - / فيلقى : فيبقى - م - // ٧ - ويزاد :  
يزداد - م - / على . فوق السطر في خ / فيبلغ - فبلغ - خ - م - / فبلغ - ك - / ج : ناقصة - م -  
١ - خ - ك - / زيادة ونقصان : نقصان وزيادة - ك - // ١١ - م - / يج - ك - ناقصة  
- خ - م - // ١٢ - في عدد مركب : ناقصة - ك - // ١٣ - مع : ربيع - م - //  
١٤ - مع جميع : جميع ناقصة - خ - م - // ١٥ - إن لم يناسب .. أجزائه : ناقصة - خ - م - //  
١٥ - هو : وهو - خ - م - // ١٦ - منه . فيه - م - بمحوه - خ - // ١٧ - فليكن . كتب ناسخ م  
قبل هذا " فليكن المركبان اب وسطحهما ، وليكن جميع أجزاء السطح مثل جميع أجزاء المضروب في  
المضروب فيه ، مربع سطح جميع أجزاء المضروب فيه في المضروب مع أجزائه وهو جميع السطحين  
بعد أن يلقى منه كل من مضروب طرفي أربعة متناسبة " ونفترح حذفها / المركبان : المركبات - ك - //

مع آة ، وجميع أجزاء ب ز ، وهو مع ب ح .

فأقول : إن جميع أجزاء ج هي جميع سطوح د في ب و ه في ز - وليكن ط - إن لم يناسب اثنان من آ ، وأجزائه - أعني أقسامه - اثنان من ب وأجزائه - أعني أقسامه - على الولاء .

فأما إن كان ط مجتمعاً < أ > من أجزاء ج ، فلأنه لما كان آ يعدّ فكذا جميع أجزاءه أجزاء ل ج ، وكذا ب وجميع أجزاءه أجزاء ل ه . ولأن آ ضرب في ب فحصل ج يكون كل واحد من سطوح آ في كل من أجزاء ب وكل من سطوح ب في كل من أجزاء آ وكل من سطوح كل من أجزاء < آ > في كل من أجزاء ب جزءاً له أيضاً ؛ لكن جميع سطوح آ في كل من أجزاء ب - التي جميعها ز - هو مثل آ في ز ، وجميع سطوح آ وكل من أجزاءه - التي مجموعها ه - في كل من أجزاء ب - ومجموعها ز - مثل سطح ه في ز ، فجميع السطحين - أعني ط - مجتمع من أجزاء ه . وأما أنه لم يشد من هذا الجميع شيء من أجزاءه : فلما قد تبين أن سطوح كل من أجزاء آ في ب وسطوح كل من آ وكل من أجزاءه في كل من أجزاء ب - التي هي أجزاء ج - داخله في ط . وكذا كل واحد من آ وب وكل من أجزاءهما ، لأن آ وكلاً من أجزاءه داخل في الأجزاء المذكورة لضرب الواحد - الذي هو جزء من أجزاء ب - في آ وكل من أجزاءه ، وكذا ب وكل من أجزاءه لضرب الواحد من أجزاء آ فيها . وليس لـ ج جزء سوى المذكورة .

وإلا فليكن ه : وهو إما أول أو مركب . وليحلل آ وب إلى أضلاعهما

١ - ز - د - ك - ح : لا يمكن تمييز الجم من الماء في م ولن نشعر إلا إذا أمكن ذلك . //

• كان : ناقصة - خ ، م - / فكذا : فكلى - ك - // ٦ - وكذا : وكلى - ك - //

٧ ، ٩ - في كل من ... أجزاء ب : ناقصة - خ ، م - // ٩ - جزءاً : جزء - ك - //

١١ - ز : د - خ - // ١٣ - آ : ناقصة - م - // ١٤ - وسطوح : أجزاء ب . //

كروها ناسخ م . // ١٦ - وكلاً : وكل - خ ، ك ، م - / داخل : دخل - خ ، م - /

لصرب : بضر - خ ، ك ، م // ١٧ - لضر : بضر - ك ، م - اللام قصيرة في خ . //

١٨ - المذكورة : هنا رسم في مخطوطة " ك "





الأوائل ، وهي الأضلاع الأوائل لـ ح . وبالبيان المذكور مرات نيين أن كان  
كان أول فلا بد وأن يعد أحد تلك الأوائل ، وهو محال ، فهو مركب . وإن  
كان مركباً فلا محالة أن يكون أحد أضلاعه الأوائل مбайناً لكل من أضلاع ج  
الأوائل أو أحد تلك الأضلاع مكرراً بعدة لم يتكرر مثلها في أضلاع ج الأوائل  
أو بالعكس . / ويظهر الخلف بمثل ما مر في المقدمة السابقة . فليس لـ ح جزء ١٣٧- و  
غير ما ذكر ، فلم يشذ من جميع السطحين المذكورين شيء من أجزائه .

أقول : ولم يتكرر شيء منها أيضاً .

إذ لو تساوى قسمان من أقسام كل منهما ، أعني سطح قسم من أقسام  
هـ في قسم من أقسام ر > وسطح قسم من أقسام د في ب < لزم أن تتناسب  
أضلاعهما ، ويكون نسبة واحد من ضلعي أحدهما إلى واحد من ضلعي الآخر ١٠

١- وهي : فهي - ك- / ج- ح- ك- // ٢- أول : أولا- خ ، ك- ، م- وهذا جائز  
أيضاً إن حصل على الأسمية والتكبير ، وأثرنا اجزاء صفة متنوعة من الصروف . / وهو محال :  
ناقصة- خ ، م / فهو مركب : ناقصة- ك- / فهو : وهو- خ ، م- // ٣- مركباً  
فلا : هاش- خ- / فلا محالة : قبا- ك- // ٤- بمثلها- مثلها- خ ، م- //  
٥- المذكورين - مكررة- م- // ٦- أيضاً : ناقصة- ك- // ٨- كل : وكل  
- ك- / أعني : ناقصة- ح- ولقد أشار السامع إلى هذا بالعلامة المروقة ولكنه نسي أن يكتبها  
في الهامش // ٩٠٨- من أقسام ... أقسام : من أقسام وكل منهما سطح قسم بين أقسام ،  
- ك- // ٩- أقسام ز : أقسام ح- م- أقسام ح- خ- //

كنسبة الثاني من ضلعي الأول إلى ثاني ضلعي الآخر بالشكل التاسع عشر من المقالة السابعة . وقد فُرض خلافه ، هذا خلف .

وإن ناسب اثنان من أقسام  $\alpha$  اثنين من أقسام  $\beta$  فجميع أجزاء  $\beta$  وهو  $\alpha$  بعد أن يلقي منه مضروب كل طرفي أربعة متناسبة . وإنما يلقي  $\langle$  ذلك  $\rangle$  لأنه إذا كان نسبة قسمين من أقسام  $\alpha$  نسبة قسمين من أقسام  $\beta$  ، فيكون مضروب الطرفين مثل مضروب الواسطتين ، فمضروب الطرفين مكرراً واجب القاءه من  $\alpha$  ، وكذلك مضروب طرفي كل أربعة متناسبة فعقبت استثناءه .

وهذا العمل سهل بأن يضرب نصف جميع أقسام  $\alpha$  الواقعة في كل أربعة متناسبة منها في جميع أقسام  $\beta$  الواقعة في جميع الأربعات ، ويلقى الحاصل من  $\alpha$  ، ويأينه ظاهر . فإذا ألقى فبيناً أنه لم يبق مكرر ، وإلا فلم يلق الجميع ، فيكون الباقي من  $\alpha$  جميع أجزاء  $\beta$  من غير نقصان وزيادة ، وذلك ما أردناه .

واعلم أنه إذا كان أحد المركبين بعد الآخر فالأسهل أن يكفى بضرب العاد مع  $\langle$  جميع أجزائه في  $\rangle$  جميع أجزاء المعلوم ، ثم نلقي من الحاصل المكررة ، فيبقى جميع أجزاء  $\beta$  . وكذا لو كان المركبان متساويين ، ولم أستدل عليه لأن بيان المقصود غير محتاج إليه .

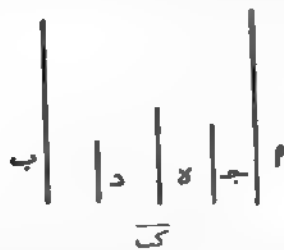
كما

كل عددين ليسا أقل اثنين على نسبتها فهما مشتركان .

وليكونا  $\alpha$   $\beta$  ، فتأخذ أقل عددين على نسبتها بالطريق المذكور في الأصول ، وليكونا  $\gamma$   $\delta$  ، فلا بد وأن يعد  $\gamma$   $\alpha$   $\beta$  عدداً واحداً : الأقل للأقل ،

١ - ضلعي : ضلع - م - / ثاني ضلعي : ثاني ضلع - م - // ٢٤١ - بالشكل ... السابعة : بشكل يذ من مقالة ز - ك - // ٧٤٤ - وإنما يلقي ... أربعة متناسبة . مكررة - م - // ٧ - استثناءه : استثناء - خ - استثناء - م - والمقصود استثناء ما كثر . // ٩ - منها : فهما - خ ، م - المقصود : كل اثنين من أقسام . // ١٠ - يلق : يكن - خ ، م - // ١٢ - واعلم : اعلم - ك - // ١٤ - فيبقى : يبقى - خ ، م - // ١٦ - كما : يظ - ك - ناقصة - خ ، م - // ١٩٤١٨ - في الأصول : هاشم - ك - المقصود : كتاب أوقليس . //

والأكثر للأكثر ، بالشكل العشرين من المقالة السابعة . وليكن ذلك العدد ،  
فلان ج ضرب في ه فحصل آ يكون ه عاداً آ . ولعل ذلك يكون عاداً أب ،  
ه آ ب مشتركان ، وذلك ما أردناه .



ليكن آ ب مركبين سطحهما ج ، ود جميع أجزاء آ ، وهو مع آ ه ،  
و ز جميع أجزاء ب ، وهو مع ب ح .

فأقول : كلما تناسب اثنان من أقسام ه < تناسباً > كتناسب اثنين من  
أقسام ح فلا بد وأن يتكرر بعض أجزاء آ ، أعني أقسام د ، في أجزاء ب ،  
أعني أقسام ز سوى الواحد .

وليكن قسما ه : ل م < ول أقل من م > وقسما ح : ن س ، وليكن  
نسبة ل إلى م كنسبة ن إلى س ، وإذا لم يمكن أن يكون كل من ل ن مساوياً  
لثاليه ، أعني م س ، فليكن الأقل ل ن لأن نسبة ل إلى م كنسبة ن إلى س .  
فبالإبدال < تكون > نسبة ل إلى ن كنسبة م إلى س ، بالشكل الثالث عشر من  
المقالة السابعة . ولأن م س ليسا أقل عددين على نسبتها فهما مشتركان ؛

- ١ - بالشكل . السابعة : بشكل من مقالة ر - ك - ونجد في هامش - خ - نص هذه النظرية :  
" أقل الأعداد على نسبة تعد جميع الأعداد التي على نسبتها عدداً واحداً ، الأقل للأقل والأكثر  
للكثر " . ه - م - // ٢ - ج : ناقصة - ك - / ولعل ، ويمثل - خ - م - / يكون :  
ناقصة - ك - هامش - ح - // ٤ - ك ب : ك ح ، ك - ناقصة - م - // ٦ - أجزاء :  
هامش - ح - / ح - م - // ٧ - تناسب : يناسب - م - // ٨ - أقسام ... م :  
مكررة - م - // ١٠ - ه : ناقصة - م - / ح : ج - م - / ن : س : د ه - م - //  
١١ - ن : د ه - م - م - م - ح - / س : م - م - // ١٢ ، ١١ - وإذا لم يمكن - كنسبة  
ن إلى س : ناقصة - خ - م - // ١٣ - ن : ج - م - / س : م - م - / م : ناقصة - م - //  
١٤ ، ١٣ - م - بالشكل - السابعة : بشكل ج من مقالة ز - ك - // ١٤ - المقالة :  
مقالة - م - / س : م - م - //

وليعدهما ع . ولأن ع يعدّ التالين ، أعني م و س ، وهما إما أن يكونا نفسي  
 آ ب أو جزأين من أجزائها ، فع يعدّ كلا من آ ب . فقد تكرر بعض أقسام د  
 في أقسام ز ، وذلك ما أردناه .



أقول : هذا الحكم ثابت أيضاً لو كان ب أول بمثل ما ذكرناه ، أعني  
 إذا كان نسبة ب إلى الواحد نسبة قسمين من أقسام ه ، كان ب مكرراً في  
 أجزاء ه .

وليكن المثال بحاله فأقول : وكلما تكرر بعض أقسام د في أقسام ز يلزم  
 أن يتناسب / اثنان من أقسام ه > تناسباً < كتناسب اثنين من أقسام ح . ١٣٧-ط

وليكن المكرر ع . وذلك لأن أقل ما في الباب على ذلك التقدير أن  
 يكون نسبة الواحد من أقسام ه إلى ع من تلك الأقسام كنسبة الواحد من أقسام  
 ح إلى ع من تلك الأقسام فضلاً عن غيرها من المناسبة ، وذلك ما أردناه . ١٠

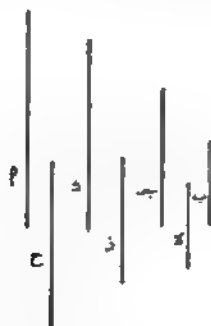
وقد بان أنه إذا لم يتكرر أي < قسم من > أقسام د في ز ، فلم يتناسب  
 أربعة فلم يتكرر شيء من أقسام ط .

- ١- وليعهما : ويعدهما - / ولأن ع : ناقصة - / س - ح - م - ل : إما : هاش - ك - // ٢ - جزأين .
- جزئين - خ ، ك ، م - / أقسام د في : ناقصة - ك - // ٣ - في ١ - و - خ ، م - //
- ٤ - نجد أمامها في ك رقم س ، وهذا الرقم سنجد أمام الفقرة التالية في خ / هذا : وهذا - ك - //
- ٥ - ب إلى الواحد : الواحد إلى ب - ك // ٦ - أجزاء : ج ه م ج - خ - //
- ٨ - يتناسب : يتناسب - م - / ح : ج - خ - م - // ١١ - ح : ج - م - / ع : ع - م - //
- انتاسبة : المناسبة - ح ، م - // ١٢ - أي : بعض - خ ، ك ، م - //

كج

كل عدد من آحاد سلسلة الاثنين فهو ناقص بواحد .

فليكن واحد منها ١ ، وليرتب الواحد مع أعداد السلسلة على الولاء إلى آ ، وهي واحد بـ جـ د آ ، وذلك لأنه ليس لآ من الأجزاء سوى الواحد وآحاد السلسلة السابقة عليه لكون ما يلي الواحد منها وهو الاثنان أول بالشكل الثالث عشر من المقالة التاسعة . والواحد ينقص عن بـ بواحد ، فهو مع بـ يساوي ضعف بـ - أعني جـ - إلا واحداً ، وليكن هـ . وكذا هـ مع جـ يساوي ضعف جـ - أعني دـ - إلا واحداً ، وليكن ز . وكذا ز مع دـ يساوي ضعف دـ - أعني ١ - إلا واحداً ، وليكن ح ، فح الذي هو مجموع أجزاء آ أقل > منه < بواحد ، وذلك ما أردناه . ١٠



كد

إذا استخرج من عدد من تضاعيف الاثنين الأفراد كما سبق ذكرها في

١ - كج : كج - خ ، ك - فلقصة - م - // ٣ - وبرت - وبرت - خ - ولبرت  
 م - ولبرت - ك - // ٥ ، ٤ - الواحد - أول : بـ جـ د - خ - جـ د - م - //  
 ٥ ، ٦ - بالشكل - التاسعة : بشكل جـ من مقالة ٥ - ك - / ونجد في هامش نص هذه النظرية  
 "إذا توالى أعداد متتالية من الواحد وكان الذي يلي الواحد أول فلا يعد الأكثر منها عدد غيرها ."  
 ٦ - ينقص من : ينقص واحد عن - ك - // ٩ - آ : ناقصة - م - // ١١ - كد :  
 كج - ك - خ - ناقصة - م - //

طريقة استخراج المتحابين ، وكانت أوائل سوى الثالث ، فالزوج الذي من  
تضاعيف الاثنين إذا ضرب في الفرد الثالث والرابع كان السطح الأكثر زائداً  
على الأقل يمثل الفرد الرابع إلا ضعف الزوج إلا واحداً .

فليكن الزوج الذي من تضاعيف الاثنين آ ، والفرد الأول ب والفرد  
الثاني د والثالث د والرابع هـ ، وب جـ ثلاثة أوائل ، ومسطحاً آ في د هـ :  
ز ح ، وضعف آ إلا واحداً ط ، فأقول : إن ح يزيد على ز بمثل هـ إلا ط .  
وذلك لأن آ شيء ، فب شيء ونصف إلا واحداً ، وجـ ثلاثة أشياء إلا واحداً ،  
وسطحهما ، أعني د ، أربعة أموال ونصف وواحد إلا أربعة أشياء ونصفاً ،  
وجميع ب جـ د - أعني هـ - أربعة أموال ونصف إلا واحداً . ولأن فضل ح  
على ز بقدر سطح آ في الفضل بين د هـ - وليكن كـ وهو أربعة أشياء ونصف  
إلا اثنين - فالسطح أربعة أموال ونصف إلا شيتين . وهـ أربعة أموال ونصف  
إلا واحداً . وإذا زيد على السطح شيان إلا واحداً ساوى هـ - فثنتين : أن  
فضل هـ على السطح < هو > بشيتين إلا واحداً . أعني ضعف آ إلا واحداً ؛  
فضل ح على ز به < هو > إلا شيتين إلا واحداً ، وذلك ما أردناه .

تكمه

وليكن المثال بحاله ، فأقول : إنه لم يماثل شيء من أجزاء آ شيئاً من أجزاء  
د سوى الواحد . وذلك لأنه ليس آ جزء من الأعداد سوى أحاد سلسلة  
الاثنين المتصلة على آ في النظم الطبيعي وكلها أزواج ، وليس آ جزء من الأعداد  
سوى ب جـ الأولين ؛ وهما فردان لكون ب مثلاً ونصفاً آ - الذي هو عدد  
< من تضاعيف الاثنين إلا واحداً - فليس هو < من تضاعيف الاثنين ،

- ١ - فالزوج - والزوج - ح م - // ٢ - إلا ضعف : أي ضعف - خ م - // ٤ - فليكن  
الزوج الذي : فليكن الزوج إلا واحداً فليكن الزوج الذي - م - // ٥ - والرابع : ووالرابع  
ح - // ٦ - وضعف ... واحداً : مكررة - ك - // ح : م - // ٧ - وجـ : د و - ع - م - // ٨ - إلا أربعة : الأربعة - م - // ٩ - ح : م - م - //  
١٣ - بشيتين : الباء مهلة وهي بين اللام والباء - ك - // ١٤ - ح : م - خ - م - // بشيتين :  
شيتين - ك - // ١٥ - ك : كد - خ ، ك - ناقصة - م - // ١٦ - شيان من  
أجزاء : ناقصة - ك - // ١٧ - د : ب - خ - م - // ١٨ - د : ك - خ - م - //  
١٩ - عدد : غير - خ ، ك م - // ٢٠ - هو : أي ب / الاثنين : اثنين - ك - //



وبالاولى ألا يكون جَ أيضاً < من تضاعيف > الاثنين . فلا شيء منهما يجره  
من أجزاء آ ، وذلك ما أردناه . /

١٣٨- و

كو

وليكن المثال بحاله ، فأقول : إن ز ح متحابان .

وذلك لأن آ المركب ضُرب في هـ الأول فحصل ح ، يكون جميع أجزاء  
ح مساوياً لسطح جميع أجزاء آ - وليكن ل - في هـ مع المجتمع من أجزاء ا مع  
آ - < وليكن > ط . ولما كان ل هو آ إلا واحداً ، فسطحه في هـ هو ح إلا هـ ،  
ومع ط ح إلا هـ إلا ط ، وقد كان ز مثل ح إلا هـ إلا ط ، فجميع أجزاء ح  
يساوي ز من غير زيادة ونقصان .

١٠ وهـ ليس مماثلاً لواحد من أجزاء آ لكونه فرداً ولكونه أكثر من آ ، فلا

٢- كو كه - خ ، ك - ناقصة - م - // ٤- ح - ج - م - // ٥- ح - ج - م - //  
يكون . فيكون خ ، م - // ٦- ح مساوياً - مساوياً - م - // ٧- ح - ج - م - //  
٨- ومع ط - مثل ح : ناقصة - ح ، م - / أجزاء ح : أجزاء ج - م - // ٩- ونقصان :  
ناقصة ح ، م - الشكل الذي قبل الأخير . // ١٠- فرداً : مفرداً - خ ، م - //

يمكن أن يكون مكرراً . ولأن آ المركب ضرب في د المركب فحصل ز يكون جميع أجزاء ز مثل سطحي ل في د و ط في جمع الواحد ، أعني جميع أجزاء د ، وليكن م . فاما ل في د فهو ز إلا د لأن ل هو آ إلا واحداً . وقد تبين أن آ في كم مثل ه إلا ط ، فآ في كم يكون مثل ه إلا جميع ط ، [ و ك ] وه إلا كم هو د ، فل في كم مثل د إلا ط . فجميع ا ن أعني ط - في كم مثل جميع د وه إلا ط اثنين ، و ط في م يزيد على هذا السطح ب ط لأن م يزيد على كم بواحد ، فسطح ط في م مثل جميع د وه إلا ط . فإذا أضيف > سطح ط في م < إلى سطح ل في د - أعني ز إلا د - صار المبلغ جميع ز وه إلا ط . وقد كان أيضاً جميع ز وه إلا ط .



فأجزاء ز أيضاً مثل ح كما كانت أجزاء ح مثله ، ولم يقع شيء منها مكرراً لأنه لم يتكرر من أجزاء آ د ، فز ح متحابان ؛ وذلك ما قصدناه .

- ١ - آ : ناقصة - خ ، م - // ٢ - سطحي : سطح - خ ، م - / آ : ١ - خ ، م - //
- ٣ - لأن مكررة - خ - / واحدا : الواحد - خ ، م - // ٤ - آ : قل - ك - / يكون :
- ناقصة - خ ، م - // ٥ - هو : وهو - خ ، م - // ٦ - اثنين : آ من ز - ك - ،
- والمقصود : مرتين . // ٧ - بواحد فسطح : نجد في م بين هاتين الكلمتين ما يلي " فسطح ط
- في م يزيد على السطح د لأن م يزيد على كم بواحد " . // ٨ ، ٧ - فإذا أضيف ... إلا ط :
- مكررة - م - مع كتابة فإذا : ذا . // ٩ - ح : م - / جميع : فجميع - خ ، م - /
- ز - د - خ ، م - // ٨ ، ٩ - وقد كان ... إلا ط : ناقصة - ك - // ١٠ - ح (الثانية) :
- في م - / يقع شيء : يعتد بشيء - ك - // ١١ - آ د : د - ك - آ ز - خ ، م - بدون الخطوط
- فوق الحروف في م كالعادة . / قصدناه : نجد بعدها في ك - " ولننتم الكلام هاهنا حامدين لولي
- كل خير وجميل ، الهادي إلى سواء السبيل ، ومصلين على نبيه محمد وآله الطيبين الطاهرين ، حسنا
- الله ونعم الوكيل " . //



## &lt; ك &gt;

وإذ قد فرغنا من تبين العمل فلنوضحه بأمثلة :

أحدها : أن نفرض الزوج الذي من تضاعيف الاثنين أربعة ، ونزيد عليها نصفها إلا واحداً تبلغ  $\bar{e}$  وهو الفرد الأول ، ونضرب الأربعة في ثلاثة ، ونقص منها واحداً تبقى أحد عشر وهو الثاني ؛ ثم نضرب الأول في الثاني يحصل  $\bar{e}e$  وهو الثالث ؛ ونزيد عليه الأولين فيحصل  $71$  وهو الرابع ولأنها - مسوى الثالث - أوائل ، فنضرب الأربعة في  $\bar{e}e$  و  $71$  يحصل  $220$  و  $284$  متحابين .

وامتحاناه برجهين : إما إجمالاً بأن يستخرج أجزاء  $220$  جميعاً : بأن يستخرج أجزاء ضلعه - أعني  $\bar{e}$  المركب من  $\bar{e}$  ،  $\bar{e}$  الأولين - وهي  $\bar{a}$  ،  $\bar{b}$  ؛ و  $\bar{e}e$  المركب من  $\bar{e}$  ،  $\bar{a}$  الأولين أيضاً ، وهي  $\bar{a}$  ،  $\bar{e}$  ،  $\bar{b}$  ولأن  $\bar{e}$  و  $\bar{e}e$  مركبان ، فأجزاء سطحهما جميعاً مضروب أجزاء  $\bar{e}$  - أعني  $\bar{a}$  - في  $\bar{e}e$  وهو  $16e$  ، مع مضروب أجزاء  $\bar{e}e$  - أعني  $17$  - في  $\bar{e}$  ، مع أجزاءه - أعني  $\bar{b}$  - وذلك  $119$  ، وهما معاً  $284$  .

ويستخرج أجزاء  $284$  جميعاً ، المركب من  $\bar{e}$  - المركب - في  $71$  الأول بأن نضرب أجزاء  $\bar{e}$  جميعاً - أعني  $\bar{a}$  - في  $71$  ، يكون  $213$  . ونزيد عليه  $\bar{e}$  مع أجزاءه وهو  $7$  فيبلغ  $220$  .

وإما تفصيلاً بأن نتعرف عدد أجزاء الأول ، أعني  $220$  . فلأنه مؤلف رباعي من  $\bar{a}$  ،  $\bar{b}$  ،  $\bar{e}$  فهو المصف الرابع ، وله من الأجزاء أحد عشر فقط ، ثم نضع أربعة مع أجزاءه مفصلاً ، وهي  $\bar{a}$  ،  $\bar{b}$  ،  $\bar{e}$  وكذلك  $\bar{e}e$  مع أجزاءه

٢- من : عن - ح ، ك ، م - / فلنوضحه : فليوضحه - م - // ٣- ونزيد : فنزيد - م -  
- فنزيد - خ - // ٤- نصفها : نصفها - خ ، م - / ونضرب : ونضرب - م - / ثلاثة :  
الثلاثة - خ ، م - // ٥- أحد عشر : ١١ - خ ، م - // ٨- بأن : بأن - خ ، م -  
١٣- ١١٩ : و ١١ - م - // ١٤- جميعاً : جميع - ك - // ١٥- ٢١٣ : ٢١٣ :  
- ك - / ٤ : ثم - م - // ١٦- فيبلغ : فيبلغ - خ ، م - // ١٧- بأن : بأن - ك - //  
١٨- ١١ : ١١ - م - / أحد عشر : ١١ - ك - // ١٩- أربعة : ٤ - ك - / وهي :  
ناقصة - ك - / ٢ وكذلك - ك - / أجزاءه : أجزاءه كذلك - ك - / وكذلك : أجزاءه : حاش - م - //

هكذا : ١ ، ١١ ، ٥٥ ؛ ثم نضرب الواحد من الأول في أقسام الثاني  
 يحصل ١ ، ٥٥ ، ١١ ، ٥٥ ، ثم ٢ منه فيها يحصل ٢ ، ١٠ ، ٢٢ ، ١١٠ ، ثم  
 ٤ في أقسام / الثاني غير ٥٥ يحصل ٤ ، ٢٠ ، ٤٤ . وهي أجزاء ٢٢٠ مفصلاً : ١٣٨ - ٥  
 عدتها أحد عشر منها كما عرفت ، وجميعها ٢٨٤ . ثم نعرف عدد أجزاء الثاني  
 أعني ٢٨٤ ، المؤلف من ٢ ، ٢ ، ٧١ . فلأنه الصنف الثاني من المؤلف الثلاثي  
 فأجزاؤه ٥ ؛ ثم نضع ٤ مع أجزائه مفصلاً ، وكذلك ٧١ هكذا ١ ، ٢ ، ٤ ،  
 ٧١ . ثم نضرب ١ من الأول في قسمي الثاني يحصل ١ ، ٧١ ، ثم ٢ منه فيهما  
 يحصل ٢ ، ١٤٢ ، ثم ٤ من الأول في ١ من الثاني يحصل ٤ ، وهذه خمسة أعداد  
 وهي أجزاء وجميعها ٢٢٠ . فهما أقل متحابين .

١٠ وأيضاً فلنغرض الزوج ثمانية ، فالفرد الأول ١٦ والثاني ٢٣ والثالث -  
 مضروبهما - ٢٥٣ ، والرابع - جميعها - ٢٨٧ . فلأن الرابع ليس بأول إذ  
 بعده السبعة بإحدى وأربعين مرة ، فلا يتأتى منه المتحابان . وقد وجدت في بعض  
 تواليفهم أن مثل المتحابين ما يحصل من هذه الأفراد ، وهما مضروب الثمانية  
 في الفرد الثالث ، أعني ٢٠٢٤ ومضروبها في الرابع ، أعني ٢٢٩٦ ، وحكم  
 ١٥ عليهما بالتحاب ؛ وذلك سهو يظهر لمن تبين ، فلينبه بأن نستخرج أجزاء  
 ٨ ، ونضعها مع جميع أجزائها : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ؛ وكذا أجزاء ٢٥٣ : ١ ،  
 ١١ ، ٢٣ ، ٢٥٣ ، وكذا أجزاء ٢٨٧ : ١ ، ٧ ، ٤١ ، ٢٨٧ ، ثم نستخرج

١ - هكذا ... الثاني : هاشم - خ - / هكذا : ناقصة - ك - / الواحد : ١ - خ - ناقصة - م - /  
 أقسام : كل من - ك - // ٢ - يحصل : حصل - خ ، ك ، م - / ١٠ ، ٢٠ - ك - //  
 ٤ - منها : ناقصة - ك - فوق الطر - خ - // ٦ - فجزاؤه ٥٥ : فجزاء - م - / ١ ، ٢ ، ٤ ،  
 ٧١ ، ٢٢٩ ، ٢٢٩٦ - خ - بدون الخطوط التي فوق الأرقام - م - ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧١ ، ٢٢٩ ، ٢٢٩٦ - ك - //  
 ٧ - فيهما . فهما - خ ، ك ، م - // ٨ - ١٤٢٤ ، ٢٠٢٤ ، ٢٢٩٦ ، ٢٢٩٦ ، ٢٢٩٦ - ك - ٢٤٤ ، ٢٤٤ ، ٢٤٤ - م - /  
 ثم : ناقصة - م - / الأول ، الأولى - ك - / وهذه : وهي - خ ، م - // ٩ - وهي : مكررة  
 ك - // ١٠ - فلنغرض : فلنغرض - م - / فالفرد : والفرد - ك - // ١١ - جميعها :  
 جميعا - م - // ١٢ - بإحدى : بإحد - خ ، ك ، م - / وقد وجدت : ووجدت - ك - //  
 ١٣ - ما - ك - / الثمانية : ٨ - ح ، م - // ١٤ - ومضروبها : ومضروبها - ك - //  
 ١٥ - عليهما : عليه - ك - / بالتحاب : بالتحاب - م - // ١٦ - ونضعها : فيضعها - م -  
 خ - / أجزائها : أجزائه - خ ، ك ، م - لرم التأنيث لأن الضمير يعود على ٨ . ٢٥٣ / ٢٥٣ -  
 ك - // ١٧ - وكذا : هاشم - خ - / ١ ، ١١ - خ ، م - / ٢٨٧ ، ٢٨٧ - م - /  
 نستخرج : يستخرج - م - هنا تنهي الصفحة في محطوة م ، وتقطع المحطوة . //

أجزاء ٢٠٢٤ مفصلاً بأن تضرب ٢ من الموضوع الأول في أقسام الموضوع الثاني وهي أربعة . فتحصل هي بأعيانها ، ثم ٢ من الأول في أقسام الثاني يحصل ٢ ، ٢٢ ، ٤٦ ، ٥٠٦ ، ثم ٤ من الأول فيها يحصل ٤ ، ٤٤ ، ٩٢ ، ١٠١٢ ، ثم ٨ من الأول فيها سوى الرابع يحصل ٨ ، ٨٨ ، ١٨٤ ، وهي خمسة عشر جزءاً ، ونصححه أنه مؤلف خماسي من ١ ، ٧ ، ١١ ، ٢٣ فهو الصنف الرابع وأجزاؤه ١٥ ، مجموعها ٢٢٩٦ . وأيضاً تضرب ٢ من أقسام الموضوع الأول في أقسام الموضوع الثالث فيحصل ١ ، ٧ ، ٤١ ، ٢٨٧ ، ثم ٢ منه فيها يحصل ٢ ، ١٤ ، ٨٢ ، ٥٧٤ ، ثم ٤ منه فيها < يحصل > ٤ ، ٢٨ ، ١٦٤ ، ١١٤٨ ، ثم ٨ منه فيها سوى ٢٨٧ يحصل ٨ ، ٥٦ ، ٣٢٨ ، وهي أجزاء خمسة عشر مثل الأولى ، إذ هو مؤلف مثل الأول ، ومجموعها ٢٧٤٤ ، فهو يزيد على ٢٠٢٤ بسبعمائة وعشرين . والغلط إنما وقع عن تصويره ٢٨٧ عدد أول ، فإنه يسقط حينئذ عن مجموع أجزائه جميع ٧ و ٤١ - أعني ضلعي ٢٨٧ ، وهو ٤٨ - في ١٥ ، جميع الموضوع الأول . وذلك المجموع هو ٧٢٠ الذي به زادت على ٢٠٢٤ .

هذا ، وأيضاً فلنغرض الزوج ١٦ يكون الفرد الأول ٢٣ والثاني ٤٧ والثالث ١٠٨١ والرابع ١١٥١ ، وجميع الثلاثة أوائل . أما الأولان فظاهر . وأما الثالث فلأنه فرد ، فلا يعدّه زوج ، ولا يعدّه الثلاثة - إذ يبقى اثنان - فلا يعدّه التسعة ، وسائر معنوداتها ، ولا الخمسة إذ ليس ما معه من الأحاد خمسة ، ولا السبعة إذ يبقى ثلاثة ، فلا يعدّه منطلق ولا أصم ولا مشترك . فلنستكشف عن الأوائل على التوالي ، إلى أن يزيد عليه مربعه . فنقسمها على مربع أحد عشر - أعني ١٢١ - يبقى ٦٢ غير منقسم على الجذر ، أعني ١١ ، ثم على مربع ١٣ -

٢ - فحصل . فيحصل - ٥ - ونصححه : ويصح - ٦ - أقسام .  
 هامش - ٧ - منه : ناقصة - ١٢ - يقط حينئذ : يقط - ٧ -  
 ١٣ - زادت : زدت - ١٤ - ٢٠٢٤ : هذا الخطأ الذي يشرح أسبابه كمال الدين الفارسي لم ينتبه إليه في القرن الخامس عشر شرف الدين اليزيدي وجنيد الكاشي كما سرى فيما بعد .  
 ١٥ - الثالث . أي ١١٥١ // ١٩ - ولا أصم ولا مشترك : ولا مشترك - ٥ - ولا أصم مشترك - ٢٠ - التوالي : السال - ٥ - غير واضحة تماماً - ٧ - / فنقسمها : مهلة - ٥ - فنقسمها - ٧ - وهي أيضاً مهلة . // ٢١ - أعني ١١ : ناقصة - ٧ - ثم على مربع ١٣ هامش - ٧ -

أعني ١٦٩ - يبقى ١٣٧ غير منقسم على جذره ، أعني ١٣ ، ثم على مربع ١٧ -  
 - أعني ٢٨٩ - يبقى ٢٨٤ غير منقسم على جذره ، ثم على مربع ١٩ - أعني ٣٦١ -  
 - يبقى ٦٨ غير منقسم على جذره ، ثم على مربع ٢٣ - أعني ٥٢٩ -  
 يبقى ٩٣ غير منقسم على جذره ، ثم على مربع ٢٩ - أعني ٨٤١ - يبقى ٣١٠  
 غير منقسم على جذره / ، إذ يبقى عشرون ، ثم على مربع ٣١ ، أعني ٩٦١ - ١٣٩ - و  
 يبقى ١٩٠ غير منقسم على جذره ، وهو لم ينقسم على مربع غيرها من الأوائل ،  
 إذ مربع ما يتلوها - وهو ٣٧ - ١٣٦٩ . فهو أول .

وإذ ذاك ، فنضرب ١٦ في ١٠٨١ يحصل ١٧٢٩٦ وفي ١١٥١ يحصل  
 ١٨٤١٦ فهما متحابان .

١٠ فنستخرج أجزاء الأول مجملًا ، وهما ١٦ ١٠٨١ ، فأجزاء الأول مجملًا  
 ١٥ ، وأجزاء الثاني كذلك ٧١ . ثم نضرب أجزاء الأول - وهو ١٥ - في الثاني  
 مع أجزاءه - أعني ١١٥٢ يكون ١٧٢٨٠ ، ثم نضرب الأول وهو ١٦ -  
 - في أجزاء الثاني - وهو ٧١ - يحصل ١١٣٦ . فإذا زيد على الحاصل ، بلغ  
 ١٨٤١٦ ، وهو أعظم المتحابين . وكذلك نستخرج أجزاء الثاني نتعرف أجزاء  
 ضلعيه ، وهما ١٦ ١١٥١ . فأجزاء الأول ١٥ ، وأجزاء الثاني واحد .  
 ١٥ فنضرب أجزاء الأول في الثاني ، نتعرف أجزاء ضلعيه مع الواحد ، أعني ١٦٥٢ ،  
 يحصل ١٧٢٨٠ ، ثم نضرب الأول - أعني ١٦ - في أجزاء الثاني ، يكون ١٦ ،  
 فتريده على الأول ، يحصل ١٧٢٩٦ .

٢٠ فإن أردت التفصيل ، وضعت - لاستخراج أجزاء الأقل - ضلعيه  
 وأجزاءهما مفصلاً : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٤٧ ، ١٠٨١ ،  
 ثم ضربت ١ من الأول في أقسام الثاني ، يحصل ١ ، ٢٣ ، ٤٧ ، ١٠٨١ ، ثم

١ - أعني ١٦٩ يبقى ١٣٧ : هاش - خ - / غير منقسم : ناقصة - ح - / على جذره . هاش  
 - ح - / جذره : الجذر - ٥ / أعني ١٣ : ناقصة - ح - / ثم على مربع ١٧ : هاش - خ - //  
 ٤٤٣ - أعني ٥٢٩ - أعني : هاش - ٥ - // ٥ - ٩٦١ - ٩٦١ - ٥ - // ٧ - ما يتلوها .  
 هاش - ٥ - // ١٠ - فنستخرج : فيستخرج - ٥ - // الأول : الأوائل - خ - / وهما :  
 وهو - خ - // ١٦ - فنضرب : فيضرب - ٥ - / نصف أجزاء ضلعيه : ناقصة - ٥ - //  
 ١٧ - فنضرب : يضرب - ٥ - / يكون : يكن - ٥ - // ١٩ - الأقل : الأول - خ - //

ضرب ٢ منه في جميعها ، يحصل ٢ ، ٤٦ ، ٩٤ ، ٢١٦٢ ، ثم ٤ منه في جميعها ، يحصل ٤ ، ٩٢ ، ١٨٨ ، ٤٣٢٤ ، ثم ٨ منه في جميعها ، يحصل ٨ ، ١٨٤ ، ٣٧٦ ، ٨٦٤٨ ، ثم ١٦ فيها - سوى الرابع - يحصل ١٦ ، ٣١٨ ، ٧٥٢ ، وهي تسعة عشر جزءاً . ويصححه أنه مؤلف سداسي من ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ . ٤٧ ، ٢٣ ، ٢ .

وكذا وضعت لاستخراج الأعظم - مفصلين ، وضربت ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ من الثاني في ١ من أقسام الأول - أعني ١ ، ١١٥١ - يحصل ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ثم ١١٥١ منه في الأقسام - سوى الأخير - يحصل ١١٥١ ، ٢٣٠٧ ، ٤٦٠٤ ، ٩٢٠٨ ، وهي تسعة أجزاء . ويصححه أنه مؤلف خماسي من ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، فيكون الصنف الثاني وأجزؤه . ١٠

ثم إذا جمعت هذه الأقسام ، حصل الأول ، وإذا جمعت تلك حصل الثاني ، وذلك ما أردناه .

تمت الرسالة بحمد ذي الجود والعلی ، والصلاة على نبيه صاحب الكمال والنهي ، وعلى صحبه وأهل بيته أهل الهدى .

١ - ضرب : ثلاثة - خ - // ٤ - تسعة عشر : ١٩ - ك - // ٥ - ٢٣ : ١٣ - ك - // ٦ - وكذا : ولدا - ح - // ٧ - أعني : عاش - ح - // ٩ - ١٢٢٠٨ . ٩١٠٨ - ك - // ١٠ - وأجزؤه : كذا أمادها ٩ في ٥ // ١٣ ، ١٤ - تمت - الهدى : ناقصة - ك - ويجد بسما " فرغ من تحريره بحمد الله تعالى وحسن توقيفه العبد الضعيف الراجي إلى رحمة ربه الطيف نوح بن علاء الدين الاندلسي يوم السبت وقت الضحى عشرين من شهر رجب سنة سبع وثلاثين ومبعدة في المدرسة الصافية رحم الله راضها في محروسة بمقداد حرسها . لله من الآفات وصل الله على نبيه محمد وآله أجمعين " . وفي أسفل الصفحة يجد " طالع العقبير إلى الله تعالى محمد بن أبي القتغ ( اسم غير مقروء ) المصري سنة ٩٠٥ هجرية " .

وتجد في خ " فرغت من اقتلح هذه التبعة الشريفة الميمونة يعون الله تعالى وحسن توقيفه في أواخر ذي الحجة إحدى وتسعين وثمانمائة هجرية ، أنا العبد الضعيف عيد ( النبي ؟ ) بن محمد بن حسين البرجدي ، غفر الله له ولوالديه ولأستأذيه آمين " .

# زين الدين الشنوشي فقرة من كتاب في علم الحساب

## بسم الله الرحمن الرحيم

- واستخراج الأعداد المنتحبة : أن تجمع الواحد والاثنين مع ما يليهما من ٧٨-٥٠
- ٥ أعداد زوج الزوج على الولاء إلى أن يجمع منها عدداً إن ردت عليه العدد الأخير من أعداد زوج الزوج المجموعة كان عدداً أولاً . وإن ربعت ما بعد الأخير من الأعداد المجموعة ، وزدت عليه ثمانية ، ونقصت منه واحداً ، وكان بعد ذلك عدداً أولاً ، فإليك إذا ضربت حيثما أحده الأولين في الثاني ، ثم المبلغ في العدد الأخير من أعداد زوج الزوج المجموعة ، كان من ذلك العدد الزائد من العددين المتحابين ؛ وإذا ضربت العدد الثالث من الأول في العدد الأخير من أعداد زوج الزوج المجموعة ، كان المبلغ العدد الناقص من العددين المتحابين . كذلك نستخرج الأعداد المنتحبة من أعداد زوج الزوج إلى غير نهاية .
- مثال ذلك : إذا جمعت الواحد والاثنين والأربعة ، وزدت على المبلغ أربعة ، صار أحد عشر ، وهي عدد أول . وإذا نقصت من المبلغ - أعني السبعة - اثنين ، بقي خمسة ، وهي عدد أول . وإذا ربعت ما بعد الأربعة ، وهي الثمانية ، وزدت على المبلغ ثمانية ، ونقصت منه واحداً ، كان الباقي أحداً وسبعين ، وهي عدد أول . فإذا ضربت الخمسة في الأحد عشر ، ثم المبلغ في الأربعة ، بلغ مائتين وعشرين ، وهي العدد الزائد من العددين المتحابين . وإذا ضربت أحداً وسبعين في الأربعة ، بلغ مائتين وأربعة وثمانين ، وهي العدد الناقص من العددين المتحابين .
- ٢٠

بيان أن هذين العددين متحابان : ألك إذا أخرجت أجزاء مائتين وعشرين ، التي هي : جزء من مائتين وعشرين الذي < هو > واحد ، وجزء من مائة وعشرة

٥ - العدد : فوق السطر // ٦ - أول / أولاً / وضعت : وضعت // ٧ - وكذا : كان //  
٨ - أول : أولاً // ١٦ - واحداً : واحد // ٢٢ - وجزء من مائة : جزء من مائة //

الذي هو اثنان ، وجزء من خمسة وخمسين الذي هو أربعة ، وجزء من أربعة وأربعين الذي هو خمسة ، وجزء من اثنين وعشرين الذي هو عشرة ، وجزء من عشرين الذي هو أحد عشر ، وجزء من أحد عشر الذي هو عشرون ، وجزء من عشرة الذي هو اثنان وعشرون ، وجزء من خمسة الذي هو أربعة وأربعون ، وجزء من أربعة الذي هو خمسة وخمسون ، وجزء من اثنين الذي هو مائة / وعشرة ؛ كان الجميع مائتين وأربعة وثمانين .

٧٨ - ط

> فإذا أخرجت أجزاء مائتين وأربعة وثمانين - التي هي جزء من مائتين وأربعة وثمانين < الذي هو واحد ، وجزء من مائة واثنين وأربعين الذي هو اثنان ، وجزء من واحد وسبعين الذي هو أربعة ، > وجزء من أربعة < الذي هو واحد وسبعون ، وجزء من اثنين الذي هو مائة واثنان وأربعون - كان الجميع مائتين وعشرين . وإذا أردت إخراج المتحايين اللذين بعد هذين ، فلا تجد الشروط حتى تجمع أعداد زوج الزوج مع الواحد والاثنين إلى الستة عشر ، وهي عدد أول مجموعها أحد وثلاثون ، وإذا ردت عليها ستة عشر بلغت سبعة وأربعين ، وإذا نقصت منها ثمانية بقي ثلاثة وعشرون ، وهي عدد أول . وإذا رتعت اثنين وثلاثين ورددت على المبلغ ثمنه ونقصت منه واحداً ، صار ألفاً ومائة وواحداً وخمسين ، وهي عدد أول . فإذا ضربت ثلاثة وعشرين في سبعة وأربعين ثم المبلغ في ستة عشر ، بلغ سبعة ألفاً ومائتين وستة وتسعين ، وهي العدد الزائد ، من العددين المتحايين . وإذا ضربت ألفاً ومائة واحداً وخمسين في ستة عشر بلغ ثمانية عشر ألفاً وأربعمائة وستة عشر ، وهي العدد الناقص ، من العددين المتحايين .

وكذلك تستخرج إلى غير نهاية كلما جمعت عدداً من أعداد زوج الزوج ولم تحدها مستوية للشروط تقدمتها إلى غير نهاية حتى تجد المستوية للشروط .

٩ - مكان ما أضفنا بياض في الأصل . // ١١ - الدين : الدين . // ١٣ - وهي : المنقوص

وهي مجموعة / عليها : عليها //

# محمد باقر اليزدي فصل من «عيون الحساب»

بسم الله الرحمن الرحيم

## فصل في استخراج العددين المتحابين\*

١٧- ج

الذين أحدهما ناقص والآخر زائد ، ومجموع أجزاء كل منهما مساوٍ  
للآخر

نأخذ من تضاعيف الاثنين عدداً إذا ضربناه مرة / في واحد وأخرى في ١٧ - ط  
ثلاثة - وبعبارة أخرى إذا جمعناه مع سابقه مرة ومع تاليه أخرى - ونقصنا من  
كل واحد من الحاصلين واحداً بقيا فردين أولين . ثم نضرب أحد الفردين الأولين  
في الآخر ليحصل فرد ثالث . فإن كان مجموع الثلاثة فرداً أول ، فمضروب  
ذلك العدد في الفرد الثالث هو أقل المتحابين وفي مجموع الأفراد الثلاثة أكثرهما .

مثاله : وجدنا الأربعة من تلك التضاعيف صالحة لذلك ، وكان مضروبها  
في واحد ونصف وفي الثلاثة هما : ٦ و ١٢ ، وبعد نقصان الواحد من كل<sup>٢</sup>  
بقي ٥ و ١١ الأولان ، < فإذا > ضربنا أحدهما في الآخر حصل ٥٥ وهو  
الفرد الثالث ، ومجموع الأفراد ٧١ وهو فرد أول . فالأربعة في ٥٥ - وهو  
٢٢٠ - أقل المتحابين ، وفي مجموع الأفراد الثلاثة - وهو ٢٨٤ - أكثرهما .

فإن لم يكن مجموع الأفراد الثلاثة أيضاً فرداً أول ، فلا يحصل منه المطلوب  
كائتمانية ، فإن مضروبيتهما في واحد ونصف وفي الثلاثة ١٢ و ٢٤ ، وبعد  
نقصان الواحد من كل<sup>٢</sup> يبقى ١١ و ٢٣ الأولان ، ومسطحهما ٢٥٣ وهو الفرد  
الثالث ، لكن مجموع الأفراد الثلاثة وهو ٢٨٧ عدد مركب يعدّه ٤١ سبع

يسرني أن أشكر محمد جعفر معينفار ، الأستاذ بالمركز القومي الفرنسي للبحوث العلمية ، على مراجعته  
المباراة الفارسية في هذا النص .

٥ - ومجموع : مجموع //



مرات . فالحاصل من ضرب الثمانية في الفرد الثالث وفي مجموع تلك الأفراد الثلاثة وهما ٢٠٢٤ و ٢٢٩٦ ليسا بعددين متحابين ، فإن < مجموع > أجزاء الأكثر منهما يزيد على الأقل بسبعمائه وعشرين ، وهو الحاصل من كل واحد من السبعة والأحد والأربعين ، ومثليهما ، وأربعة أمثالهما ، وثمانية أمثالهما .

أقول : وقد أخطأ هنا صاحب المفتاح وصاحب كنه المراد وغيرهما من مهرة في الحساب ، فلم يشترطوا كون مجموع الأفراد الثلاثة أول ، فحسبوا أن هذين العددين متحابان ، وأن أجزاء الأكثر هي : الواحد والاثنتان والأربعة والثمانية ونصفه وربعه وثمانته لا غير ، ومجموعها يساوي الأقل .

واستخرج صاحب كنه المراد من ٢٥٦ أيضاً عددين حسبهما متحابين ، ووضعهما في لوحٍ وفقي ، وغفل عن كون ٧٦٧ - وهو الحاصل بعد نقصان الواحد من ضرب ٢٥٦ في الثلاثة - مركباً بعد ٥٩ ثلاث عشرة مرة ، وذلك يقتضي أن يعد الأقل ١٣ وأضعافه ، وكذا ٥٩ وأضعافه ، وهي غير أجزاء المساوية للأكثر . ولقد نظمتُ طريق تحصيلهما بهذا الوجه في رباعية .

زوج الزوجي دوسه ودر نصف سه زن

بي بك اكر اولتند يك ران دو فيكن\*

درهم زن وجمله مگر شد اول آن زوج

در كل سه فرد وحاصل فرد بز ن /

منح لي طريق آخر : نأخذ من سلسلة تضاعيف الستة على نسبة الضعف عددين ٦٨ - و متوالين إذا نقصنا من كل منهما واحداً بقيا فردين أولين . فنضرب أحد ذينك الفردين في الآخر فيحصل فرد ثالث . فإن كانت الأفراد الثلاثة جميعاً فرداً

٤ - أمثلهما = لقد برهن كمال الدين المارسي على هذه القضية من قبل . انظر " تذكرة الأحياء في بياك التحاب " كثر // هـ المتاح : المقصود : مفتاح الحساب لجشيد الكاظمي . انظره بتسقيق أحمد حميد المرداش ومحمد حمدي الحقي الشيخ ، القاهرة ، ١٩٦٧ ، ص ٢٢٣ - ٢٢٥ وبتحقيق نادر التليسي ، دمشق ، ١٩٧١ ، ص ٤٨٤ - ٤٨٨ . وانظروا الذي يشير إليه اليردي موجود بأفعل ، ولم يتنبه إليه محققو دارسو الكاظمي / كنه المراد : المقصود : كنه المراد في علم الوقي والأعداد ، لشرف الدين علي اليزدي المتوفى في حدود سنة ٨٥٠ هـ // ١١ - ثلاث عشرة ثلاثة عشر //

أول ضرب ثلث أكثر ذينك العددين المأخوذين ، أو ثلثي أقامها في الفرد الثالث ليحصل أقل المتحابين وفي الفردين الأولين ، ونزيد الحاصل على الأقل فيحصل أكثرهما .

مثاله : وجدنا ١٩٢ و ٣٨٤ المتوالين من تلك السلسلة صالحين لذلك ، وبعد نقصان الواحد من كل يبقى ١٩١ و ٢٨٣ الأولان ، ومسطحهما ٧٣١٥٣ الفرد الثالث ، ومجموع الأفراد الثلاثة ٧٣٧٢٧ ، وهو فرد أول . وكان ثلث الأكثر ١٢٨ ، ضربناه في الفرد الثالث ، حصل أقل المتحابين ، وهو ٩٣٦٣٥٨٤ ، ثم ضربناه في مجموع الفردين الأولين ، وهو ٥٧٤ ، حصل ٧٣٤٧٢ ، زدناه على الحاصل الأول ، حصل ٩٤٣٧٠٥٦ ، وهو أكثرهما

وقد نظمت هذه القاعدة أيضاً في رباعية ( رباعي ) :

كردي جوز شش بنسبت ضعف صعود

مضروب دو چار يي بك اول كتر بود

يا اولها اول بزن ثلث اخير

دو ثالث واولان كه ياي مقصود

وأما استخراج أجزاء كل من المتحابين : فلأجزاء الأقل نأخذ الواحد وكلاً من الأفراد الثلاثة وأضعافها بعدة ، يحصل من الواحد ذلك الزوج المعمول عليه ، ولا محالة ، يكون الضعف الأخير للفرد الثالث بهذه العدة نفس العدد الأقل ، فنسقطه ونجمع البواقي .

ففي المثال الأول أخذناها مع أضعافها مرتين ، وأسقطنا الضعف الثاني للفرد الثالث ، فكانت هكذا :

١ ٥ ١١ ٥٥

٢ ١٠ ٢٢ ١١٠

٤ ٢٠ ٤٤

ولأجزاء الأكثر : نأخذ الواحد ومجموع الأفراد الثلاثة وأضعاف الواحد إلى ذلك

الزوج المعمول عليه وأضعاف مجموع الأفراد الثلاثة ما أمكن ٧ ٢ ١

١٤ ٤ ٢

٨ ٤

ففي المثال الأول أخذنا الواحد وضعفه مرتين و ٧١ وضعفه مرة وهي هذه

٧١ ١

١٤٢ ٢

٤

وفي المثال الأخير هكذا ، والله أعلم ،

أجزاء الأكثر		أجزاء الأقل			
مجموع الأفراد	الواحد	المرد الثالث	المرد الثاني	المرد الأول	الواحد
٧٢٧٢٧	١	٧٢١٥٣	٣٨٣	١٩١	١
١٤٧٤٥٤	٢	١٤٦٣٠٦	٧٦٦	٣٨٢	٢
٢٩٤٩٠٨	٤	٢٩٢٦١٢	١٥٣٢	٧٦٤	٤
٥٨٩٨١٦	٨	٥٨٥٢٢٤	٣٠٦٤	١٥٢٨	٨
١١٧٩٦٣٢	١٦	١١٧٠٤٤٨	٦١٢٨	٣٠٥٦	١٦
٢٣٥٩٢٦٤	٣٢	٢٣٤٠٨٩٦	١٢٢٥٦	٦١١٢	٣٢
٤٧١٨٥٢٨	٦٤	٤٦٨١٧٩٢	٢٤٥١٢	١٢٢٢٤	٦٤
٩٤٣٧٠٥٦	١٢٨	٩٣٦٣٥٨٤	٤٩٠٢٤	٢٤٤٤٨	١٢٨

أما إذا لم تكن الأفراد معلومة ، فننصف كلاً من العددين مرة بعد أخرى إلى أن ينتهي إلى فرد ، وهو في الأكثر مجموع الأفراد الثلاثة ، وفي الأقل ثالثها . ونرسم كل نصف تحت منصفه ، ثم نضع ٢ محاذياً للنصف و ٤ محاذياً لنصف النصف ، وهكذا إلى أن ينتهي إلى محاذاة الفرد للزوج المعمول عليه . فمجموع هذه الرسومات للأكثر أجزاءه . وأما في الأقل ، فانقص من مضروب ذلك الزوج في الواحد والنصف واحداً ، ومن مضروبه في الثلاثة واحداً ، ليحصل الفردان الأولان ، وضعفهما بإزاء الواحد المرسوم فوق ٢ ، وضعفها مرة بعد أخرى واضعاً الحواصل بين الأزواج المرسومة إلى أن ينتهي إلى الزوج المعمول عليه ، فمجموع الرسومات أجزاء الأقل .

وقد نظمت طريق تحصيل الأجزاء في هاتين الرباعيتين (رباعي) :

مگر واحد وافراد ثلاثة در اقل      بر نسبت ضعف رانی ای شیخ اجل  
تا عین اقل برآید آن اجزا را      کن جمع که اکثر بدر آید ز عمل  
> أما الآخر فهو < رباعي

• نصف ودوربع وچار از اکثر بگیر      زین گونه بگیر تا بود نصف بدیر  
این جمله اجزاست بواحد شده جمع      مثل عدد اقل بر مرد دید

آحاد سلسلة تضاعیف الاثنین أبداً تكون أحد الأزواج الأربعة على هذا  
الترتيب : ٢ ثم ٤ ثم ٨ ثم ١٦ ، فلا يتولد المتحابان مما يكون آحاده ٢ ، ٤ ،  
لكون آحاد مضروب الثلاثة في الأول ومضروب واحد ونصف في الثاني أبداً  
ستة . وبعد إسقاط الواحد من كل من الحاصلين يكون آحاد ما بقي خمسة .  
وما آحاده الخمسة لا يمكن أن يكون أول ، لكون الخمسة عاداً لها ، وكذا ما  
يكون آحاده ٨ و ١٦ إذا لم يحصل منه فردان أولان كما ذكرنا في المائتين والستة  
والخمسين ، أو لم يجتمع من أفرادها الثلاثة فردان أولان كما ذكرنا في الثمانية .  
ونحن قد استقرينا فلم نجد عاشر الأربعة وهو ألفان وثمانية وأربعون ، وتاليه  
وهو ضعفه ، صالحين لذلك ، لكون الفرد الأول المتولد من الأول مسطح  
٣٧ في ٨٣ ، والفرد الثاني المتولد من الثاني مسطح ١١ في ألف ومائة وسبعة عشر ،  
ولا رابع عاشرها ، لكون الفرد الأول المتولد منه مسطح ثلاثة وعشرين في  
ألفين ومائة وسبعة وثلاثين .

## فصل

٢٠ في تحصيل العددين المتعادلين اللذين يكون < مجموع > أجزأهما متساويين  
تقسم زوجاً ما بعددين أولين مرة وبأولين آخرين أخرى وتأخذ مسطحيهما .  
مثاله : قسمنا ١٦ بثلاثة وثلاثة عشر ، وأخذنا مسطحهما ؛ ومرة بخمسة وأحد  
عشر وأخذنا مسطحهما ، فكان / العددان وهما ٣٩ و ٥٥ متعادلين : أجزاء ٦٩ - و  
كل منهما سبعة عشر .

١ - > أما .. فهو < : هناك كلمة أو أكثر مطبوعة في المخطوطة .

# ابن السبائك المراكشي

## فصل من «رفع الحجاب عن أعمال الحساب»

بسم الله الرحمن الرحيم

### فصل

١٩ - ٥

- ويتنفع بجمع المربعات في تركيب الكلمات الثلاثية لحصر اللغات وشبهها ،  
مثل كم كلمة ثلاثية في حروف المعجم بصورة واحدة دون مقلوباتها ؟ لأن  
الكلمات الثلاثية إنما هي جمع مثلثات ضلع منهاها أقل من تلك العدة باثنين أبداً .  
وجمع المثلثات هو بضرب ضلع منهاها في مسطحي العددين اللذين يباينه  
بعده وأخذ سدس الخارج ، كما هو العمل في جمع مربعات الأفراد ومربعات  
الأزواج . وكان ذلك كذلك لأن الثابتة بضرب العدة المفروضة في نصف العدد  
الثاني منها قبلها ، والثلاثية بضرب الثنائية في ثلث الثالث من تلك العدة / قبلها ، ١٩ - ط  
والرباعية بضرب الثلاثية في ربع العدد الرابع من تلك العدة قبلها ، والخماسية  
بضرب الرباعية في خمس العدد الخامس قبلها ، وعلى هذا أبداً تضرب عدد  
التركيب الذي قبل التركيب المطارب في العدد الذي بعده من العدة المفروضة  
قبلها مثل عدد التركيب المطلوب ، وتأخذ من الخارج الجزء السمي لعدد التركيب

وعلة ذلك بيّنة من هذا الباب :

أما الثنائية ، فهو جمع الأعداد على تواليها من واحد إلى العدد الذي قبل  
العدة المعطاة .

- ٨ - بضرب : يضرب - ت - / منهاها : منهاها - ت - / مسطحي : مسطح - ت - / يباينه :  
الحروف غير ميرة تماماً - ت - // ١٠ - وكان : كان - ت - و - // ١١ ، ١٠ - العدد الثاني  
منها قبلها : العدة واثنين منها قبلها - ت - // ١٢ ، ١٣ - والرباعية : الخامس قبلها : ناقصة  
- ت - // ١٤ - قبل التركيب : قبل المركبة - ت - / المطوب : المطبوعة - ت - //  
١٥ - التركيب المطوب : التركيب المطبوعة - ت - / السمي لعدد التركيب : السمي هو بالتركيب  
- ت - // ١٦ - بيّنة : بيّنة - ت - // ١٧ - من واحد : ناقصة - و - / قبل : قبله  
- و - // ١٨ - المعطاة : المعطيات - و - ؛ كتبها دائماً هكذا ومتكفي بهذه الإشارة . //

وأما الثلاثية ، فإن كل واحدة من الثلاثيات يجتمع منها واحد من بقية العدة فتكون الاقترانات الثلاثية مثل ضرب الثنائية في العدة المعطاة إلا اثنين ، وهو العدد الثالث من العدة المعطاة قبلها :

ولما كانت التأليفات في الثلاثية الواحدة ثلاث ثنائيات ، لزم من ذلك تكرار الثلاثية ثلاث مرات ، هي ومقلوباتها ؛ مثل أن الألف والباء إذا جمعتا مع الجيم ، كان ذلك كجمع الألف والجيم مع الباء وكجمع الباء والجيم مع الألف . فهذه الثلاثيات الثلاث حاصلها ثلاثية واحدة ، ولعنا صارت ثلاثية لأجل ترتيب حروفها الثنائية ؛ فيجب أن يؤخذ ثلث الثنائيات ويُضرب في سائر العدة المعطاة أو يُضرب الثنائية في ثلث سائر العدة .

وأما الرباعية ، ففيها من الاقترانات الثلاثية أربعة ، لأن ثنائياتها ستة وضربها في ثلث الثالث من الأربعة يخرج منه أربعة ، وهو عدد الثلاثيات التي في الأربعة ، كما ذكرناه . فصار يحصل من عدد التركيبات الثلاثية مع كل حرف من باقي العدة المعطاة أربع صور متماثلة لم تختلف إلا بالترتيب فقط ؛ فوجب أخذ الربع من الخارج . وكذلك يلزم في الخماسية تكرار خمس صور ، لأن فيها من الرباعيات خمسا ، لأن التأليفات تسقط في كل تأليف حرفاً ، فتكون عدة التأليفات على عدة حروف الكلمة ، فيلزم من هذا أنه إذا وضع جملة عدد وأردنا عدة التراكيب التي تكون فيها بعدة معطاة ، فإننا نضع أعداد الضرب متفاضلة بالواحد يكون أعظمها عدد تلك الجملة وتكون عدتها كمعدة التراكيب ثم نضع أعداداً للقسم عليها ، متفاضلة بالواحد ، يكون أعظمها تلك العدة المعطاة وابتدأها من الواحد ومن الاثنين ، ثم نزيل الاشتراك بين الأعداد الأولى والأعداد الثانية . ومتى فعلنا ذلك تذهب الأعداد الثانية كلها أبداً ، ثم نضرب

١ - منها : فيها - ت - // ٢ - فتكون . فيكون - ت - // ٥ - جمعا : جمعا - و - //  
 ٦ - كجميع : جميع - ت - / وكجميع : وجميع - ت - // ٧ - الثلاثيات : الثلاثية  
 - ت - // ٩ - الثنائيات : الثنائيات - و - // ١٣ - تختلف : يختلف - و - //  
 ١٥ - حرفاً : حرف - ت ، و - // ١٦ - فتكون . فيكون - ت - // ١٧ - وأردنا :  
 وأردنا عليه - ت - // ١٨ - التراكيب : التركيب - و - // ١٩ - نضع : نضع - ت ،  
 و - / أعداداً : أعداد - ت - // ٢٠ - نزيل : نزيل - ت ، و - // ٢١ - الثانية :  
 التي فيه - ت - / تقرب : تقرب - ت ، و - //

الباقى من الأعداد الأولى بعضه في بعض ، يكون عدة ما في تلك الجملة من تلك التراكيب .

ويلزم من ذلك أن كل عددين متوالين / يُضرب أحدهما في نصف ٢٠- و الثاني ، فالخارج هو ما في أكبرهما من التركيبات الثنائية ، وهو مثلث أصغرهما ، كما تقدم .

وكل ثلاثة أعداد متوالية يُضرب أحدهما في نصف الثاني ، وما خرج في ثلث الثالث فالخارج هو ما في أكبرها من التركيبات الثلاثية ، وهو ما يجتمع من المثلثات على تواليها إلى مثلث العدد الأصغر ، وهو مثل جمع مربعات الأفراد المتوالية من الواحد إلى الأصغر إن كان فرداً ، أو مثل جمع مربعات الأزواج المتوالية من الاثنين إلى الأصغر إن كان زوجاً ، كما ظهر لك بالاستقراء .  
ولهذا وجب من العمل في جمع مربعات الأفراد ومربعات الأزواج ما ذكرناه في الكتاب .

ويلزم عن ذلك ما وجد بالاستقراء في جمع المربعات المتوالية التي تقدم ذكرها ، فيكون لأجل ذلك الاستقراء متلازماً .

وأما التاليفات التي نحصل في الصورة الواحدة على القلب في عدة معطاة ، فنفرض أعداداً متوالية من اثنين أو من الواحد يكون آخرها مثل تلك العدة المعطاة ، ثم نركبها بالضرب ، نخرج أشخاص التركيبات من تلك العدة الواحدة على القلب ، لأن الحرفين فيهما صورتان : صورة وقلبها ، فإذا أضيف إليهما حرف ثالث ، كان مع كل واحدة من الصورتين : إما أولاً ، وإما وسطاً ، وإما آخراً ، فتلك ست صور . فإذا أضيف إليها حرف رابع كان مع كل

- ١ - من الأعداد : من العدد - و - // ٢ - التراكيب : التركيب - ت - التركيب - و - //  
٣ - يضرب - ضرب - ت - // ٤ - التركيبات : التاليفات - ت - // ٥ - أكبرها : أكبرهما - ت - و - // ٦ - الأفراد : الأزواج - ت - // ٧ - الأزواج : من الأزواج - ت - // ٨ - التي - الذي - و - // ٩ - ذكرها - ذكره - و - // ١٠ - تحصل : يحصل - و - // ١١ - على القلب : قائمة - ت - // ١٢ - ناقصة - ت - // ١٣ - أعداداً : من أعداد - ت - // ١٤ - مركبها - و - // ١٥ - وقلبا : وقلبها - ت - // ١٦ - ست - ستة - و - // ١٧ - فإذا : وإذا - و - //

صورة من تلك الست : إما أولاً ، وإما ثانياً ، وإما ثالثاً ، وإما رابعاً . فتلك أربع وعشرون صورة للرباعية الواحدة . فالثنائية اثنان ، والثلاثية من ضرب اثنين في ثلاثة ، والرابعة من ضرب اثنين في ثلاثة في أربعة ، كذلك على القياس فيما بعد ذلك . وظاهر من ذلك أن مسطح كل عددين متوالين هو ما في أكبرهما من الثنائيات وقلبيها ؛ وأن مسطح ثلاثة أعداد متوالية هو ما في أكبرها من الثلاثيات وقلبيها ؛ وأن مسطح أربعة أعداد متوالية هو ما في أكبرها من الرباعيات وقلبيها ؛ وكذلك على هذا ما بعد ذلك .

فإن أردنا هذه الحروف المتوالية الجامعة لتلك الصور ، فنكرر حروف صورة منها بقدر عدة حروفها إلا واحداً ، وتزيد أول حرف منها ؛ فتكون تضرب أبداً عدة حروف صورة في مثلها إلا واحداً وتزيد واحداً .

وهذا تعمل في مسألة من نسي مثلاً أربع صلوات مختلفة ، كل صلاة من يوم ولا يدري أينها قبل الأخرى ، فإنه يصلي ثلاث عشرة صلاة : يصلي أربعاً يرتبها كيف شاء ، ثم يعيدها بعينها على ترتيبها مرة أخرى ، ثم يعيدها كذلك مرة ثالثة ، ثم يعيدها التي ابتداء بها . ظهر ذلك / من الاستقراء . ٢٠ - ٥

وتركت من هذا الباب أعداد الوقف والأعداد المتحابية ، فإنه لا جدوى لها في العلوم ، مع طولها واختلاف عمالها .

- ١ - الست : الستة - و // ٥ - وقلبيها : وقلبيها - ث - // ٦ - وقلبيها : وقلبيها - ث - // ٦ - و - وأن مسطح : ومسطح - ث - // ٧ - وقلبيها : وقلبيها - ث - // ٨ - الصور : الصورة - ث - / فتكرر : فكرر - و - ككرر - ث - // ٩ - صورة : الصورة - ث - / فتكون : فيكون - ث - // ١٠ - مثلها : مثله - ث - / وتزيد واحداً : تاقصة - ث - // ١٢ - ثلاث عشرة : ثلاثة عشر - ث - و - // ١٤ - مرة ثالثة : ثالثة - و - // ١٦ - العلوم : المعلوم - ث - //



بسم الله الرحمن الرحيم

## الفصل الرابع

### في إيجاد الأعداد المتحابية من أعداد زوج الزوج

إذا أردت ذلك فضع أعداد زوج الزوج ما شئت منها في سطر مبتدأه  
من الواحد ، وكانت : واحد واثنان وأربعة وثمانية وستة عشر واثنان وثلاثون ؛  
وجمعنا منها ما قبل الثمانية مثلاً ، وحفظناه وذلك سبعة ؛ ثم ترد على هذه  
السبعة آخر الأعداد التي جمعنا ، يكون المجموع أحد عشر ؛ وتنقص من  
السبعة العدد الذي قبل آخر ما جمعنا ، وذلك < اثنان > من سبعة يبقى خمسة ،  
فهذه الخمسة والأحد عشر كل واحد منها عدد أول ؛ فتضرب أحدهما في الآخر  
ينخرج خمسة وخمسون ، تضربه في آخر الأعداد التي جمعنا ، يجتمع من ذلك  
مائتان وعشرون ، وهو أحد العددين المتحابين ؛ فاحفظه . ثم تأخذ العدد الذي  
يلي آخر الأعداد التي جمعنا إلى جهة الكثرة ، وذلك ثمانية ؛ وتأخذ الرابع من  
الثمانية إلى جهة أول المراتب في القلة ، وهو واحد ؛ فتجمعه مع الثمانية وتضرب  
المجموع في الثمانية يكون الخارج اثنين وسبعين ، فتسقط واحداً منه يبقى أحد  
وسبعون ، وهو عدد أول ؛ فيصح خروج العدد منه بأن تضربه في آخر الأعداد  
التي جمعنا أولاً ، وذلك في أربعة ، يكون الخارج مائتين وأربعة وثمانين ، وهو  
العدد الثاني من العددين المتحابين .

فعددا مائتين وعشرين ومائتين وأربعة وثمانين عدداً متحابان . ولا  
يمكن استخراج عددين متحابين أقل من هذين العددين ، وهما أولاً الأعداد  
المتحابية ، وأحد هذين العددين زائد والآخر ناقص ، ولا يكونان إلا كذلك :  
أحدهما زائد وهو العدد الأول والآخر ناقص ؛ ومقدار الزائد عليه كبقدر  
نقصان الناقص منه ؛ والزيادة والنقصان كل واحد منهما مساوٍ لفصل ما بين العددين ،  
فيكون لذلك إذا جمعنا أجزاء الزائد كلها اجتمع منها مثل العدد الناقص ؛

وإذا / جمعنا أجزاء العدد الناقص كلها اجتمع منها مثل العدد الزائد . فبهذا  
الاعتبار قيل فيهما متحابان ، والعدد الناقص هو الأكثر أبداً ، والزائد هو  
الأقل .

اعلم أنه إن لم يكن كل واحد من تلك الأعداد التي هي الخمسة والأحد  
عشر والواحد والسبعون عدداً أول ، تتجاوزنا بالجمع في أعداد زوج الزوج إلى  
الثمانية ، فيجتمع الثمانية مع السبعة ، وتعمل العمل المذكور ، والذي يجمع  
خمسة عشر ، فتزيد عليها آخر الأعداد التي جمعت ، وهو ثمانية ، يكون  
المجموع ثلاثة وعشرين ، وهو عدد أول ، ثم تنقص من الخمسة عشر العدد  
الذي قيل آخر ما جمعت وهو أربعة ، يبقى أحد عشر ، فالأحد عشر والثلاثة  
والعشرون كل واحد منها عدد أول . فتضرب أحدهما في الآخر ، يجمع لك  
مائتان وثلاثة وخمسون ، فتضربها في ثمانية آخر الأعداد التي جمعت يجمع من  
ذلك ألفان وأربعة وعشرون ، وهو أحد العددين المتحابين إن صح الشرط الثالث .  
ثم تأخذ العدد الذي على آخر الأعداد التي جمعنا إلى جهة الكثرة ، وهو ستة  
عشر ، وتأخذ الرابع منه إلى جهة أول المراتب وهو اثنان ، فجمعت مع الستة  
عشر فيكون ذلك ثمانية عشر . فتضربها في الستة عشر يكون مائتين وثمانية  
وثمانين ، فتسقط منها واحداً ، يبقى مائتان وسبعة وثمانون ، وهو عدد مركب  
ليس من الأعداد الأول ، فلا يخرج به العدد الثاني ، فيبطل العدد الأول .

ثم تتجاوز بالجمع إلى الستة عشر ، وتعمل بها ما ذكر حتى تصح لك  
الشروط الثلاثة . ولو جمعت الستة عشر مع ما قبلها ، وعملت العمل المذكور  
خرجت لك الأعداد الثلاثة المشترط فيها البساطة ، كل واحد منها عدد أول .  
فالأول منها سبعة وأربعون ، والثاني ثلاثة وعشرون ، والثالث ألف ومائة وأحد  
وخمسون ، وكل واحد منها عدد أول ، ويخرج لنا أحد العددين المتحابين  
سعة عشر ألفاً ومائتان وستة وتسعون ، والآخر ثمانية عشر ألفاً وأربعمائة  
وسبعة عشر ، وهو العدد الناقص . وهذان العددان هما اللذان يليان العددين  
الأولين على الطبيعة ، وليس بينهما عددان متحابان - فاعلمه .

وإن شئت : في السبعة التي هي مجموع الواحد والاثنين والأربعة ضربتها

٤ - إن : من // ٥ - أول : أولاً // ٨ - عشرين : عشرون // ١٢ - الـ : التي //

١٦ - مائتان : مائتين / وثمانون : وثمانين // ٢٤ - وهذان : وهذان //

في الرابع ، وهو ثمانية ، ونقصت من الخارج أول الأعداد ، وهو واحد ، وضربت الباقي وهو خمسة وخمسون في الثاني من الرابع قبله ، وهو أربعة ، يخرج لك العدد الزائد . وإن شئت ضربتها في الخامس وهو ستة عشر ونقصت من الخارج العدد الثاني ، وضربت الباقي وهو مائة وعشرة / في الثالث من الرابع قبله ، وذلك في اثنين ، يخرج لك العدد الزائد . وإن شئت ضربتها في السادس ، وذلك في اثنين وثلاثين ، ونقصت من الخارج الثالث من الأعداد وهو الرابع من العدد المضروب فيه إلى جهة القلة ، وضربت الباقي ، وهو مائتان وعشرون ، في العدد الرابع من الرابع قبله وذلك في واحد ، يخرج المطلوب ، وهذه وجوه كلها تخرجك إلى العدد الزائد من المتحايين .

وأما العدد الناقص منها فتجمع واحداً أبداً إلى الرابع مجتمع لك تسعة ، فهذه التسعة أصل لإخراج العدد الناقص كما كانت السبعة الناقية من الثمانية بعد إسقاط واحد منها أصلاً لإخراج العدد الزائد . وإن شئت في هذه التسعة ضربتها في الرابع نفسه ونقصت من الخارج أول الأعداد ، وضربت الباقي ، وهو واحد وسبعون ، في الثاني من الرابع قبله ، وذلك في أربعة ، يخرج لك العدد الناقص ، وذلك مائتان وأربعة وثمانون . وإن شئت ضربتها في الخامس ، وذلك ستة عشر ، ونقصت من الخارج ثاني الأعداد ، وضربت الباقي ، وهو مائة واثنان وأربعون ، في الثالث من الرابع قبله وذلك في اثنين ، يخرج المطلوب وإن شئت ضربتها في السادس وهو اثنان وثلاثون ، ونقصت من الخارج ثالث الأعداد ، وضربت الباقي في الرابع من الرابع قبله ، يخرج لك المطلوب . فهذه وجوه كلها تخرجك إلى العدد الناقص من العددين المختلفين .

وإن شئت في استخراج العدد الناقص أيضاً ، فاضرب السبعة التي كانت باقية من العدد الرابع أولاً في مجموع الثاني والرابع ، وذلك في عشرة ، وتزيد على الخارج أول الأعداد ، وهو واحد ، وتضرب المجموع ، وهو واحد وسبعون ، في الثاني من الرابع قبله ، وذلك في أربعة ، يخرج لك المطلوب . وإن شئت فاضربها في مجموع الثالث والخامس ، وذلك في عشرين ، وتزيد الثاني من الأول على الخارج ، وتضرب المجموع في الثالث من الرابع قبله ، وذلك في

اثنين ، يخرج المطلوب . وإن شئت فاضربها في مجموع الرابع والسادس ، وتزيد على الخارج الثالث من الأعداد ، وتضرب المجموع في الرابع من الرابع قبله ، وذلك في واحد ، يخرج المطلوب . فهذه أيضاً وجوه كلها تخرجك إلى العدد الناقص من العددين المتعاقبين .

• وأما ما يخرجك إلى الزائد بهذا العمل ، فإنك تضرب التسعة ، التي كانت أصلاً لاستخراج العدد الناقص في العمل الأول . في الفضل بين الثاني والرابع . وذلك في ستة ، وتزيد على الخارج أول الأعداد ، وتضرب المجموع . وهو خمسة وخمسون . في الثاني من الرابع قبله ، وذلك في أربعة ، يخرج لك المطلوب . وإن شئت فاضربها في الفضل بين الثالث والخامس ، وذلك في اثني عشر . وتزيد الثاني من الأول على الخارج وتضرب المجموع في الثالث / من الرابع ، وذلك في اثنين ، يخرج المطلوب .

وإن شئت فاضربها في الفضل بين الرابع والسادس ، وذلك في أربعة وعشرين ، وتزيد على الخارج الثالث من الأعداد ، وتضرب المجموع في الرابع من الرابع قبله ، وذلك في واحد ، يخرج المطلوب . في هذه أيضاً وجوه كلها تخرجك إلى العدد الزائد من العددين المتعاقبين .

وإن شئت استخراجهما معاً ، فخذ العدد الرابع وزد عليه واحداً ، يكن تسعة ، وانقص منه واحداً ، يكن سبعة ، ثم اضرب كل واحد من السبعة والتسعة في الثمانية ، وانقص من كل واحد من الخارجين واحداً ، يبقى للتسعة أحد وسبعون وللسبعة خمسة وخمسون . فاضرب كل واحد منهما في العدد الثاني من الرابع قبله إلى جهة القلة ، يخرج لك العددين المطلوبين . أو تضرب كل واحد من السبعة والتسعة في الخامس ، وتنقص من كل واحد من الخارجين اثنين ، وتضرب باقي كل واحد في اثنين ، وهو العدد الثالث من الرابع قبله ، يخرج المطلوب . أو تضرب كل واحد من السبعة والتسعة في السادس ، وتنقص من كل واحد من الخارجين العدد الثالث ، وتضرب باقي كل واحد في العدد الرابع من الرابع ، وهو الأول ؛ فاعلم ذلك . وإن شئت أيضاً في إيجاد هذين العددين ،

٣- يخرج : تخرج // ١- المجموع : بالمجموع // ١٧ - اضرب : انضرب //

٢٠ - المطلوبين : الطالبين // ٢٥ - هذين : هاذين //

فرضت عددين متوالين من أعداد روج الزوج ، وكانت أربعة وثمانية ، فتجمعها يكون اثني عشر ، فتأخذ نصفه : ستة ، فتضربها في المجموع ، يكون اثنين وسبعين . فتحصل لك بهذا العمل ثلاثة أعداد : الستة والاثنان عشر والاثنان والسبعون . فتسقط من كل واحد منها واحداً ، فإن بقي كل واحد منها عدداً أول ، فقد تم ما أردنا ، وذلك خمسة وأحد عشر وأحد وسبعون ، كل واحد منها عدد أول . ولولم يخرج كل واحد منها عدداً أول . لتخطينا العددين المقروصين إلى ما يليهما بعدهما ، ثم تضرب أول الأعداد الثلاثة في ثانيها ، يكون الخارج خمسة وخمسين ، فهذا أصل العدد الزائد - والمحفوظ الثالث ، وهو الواحد والسبعون ، هو أصل العدد الناقص . ثم تضرب كل واحد من الأصيلين في أصغر العددين المقروصين . وذلك في أربعة ، فيكون العدد الزائد مائتين وعشرين والناقص مائتين وأربعة وثمانين ؛ وذلك ما أردنا .

ولو أخذنا الثمانية والستة عشر لما صح بهما العمل .

ولو أخذنا الستة عشر والاثنين والثلاثين ، لصح بهما العمل ، وكان العدد الزائد والناقص على ما ذكرنا فيما تقدم ، فاعلم ذلك ، وأنه الموفق .

وأما البرهان على جميع هذه المسائل فلست أذكره في هذا الموضع لطوله وتشعبه ولكونه برهاناً على ما هو خارج الكتاب الذي تهدينا لشرحه ، ومع أنني أذكره إن شاء الله في مقالة منفردة بهذا العمل ، وألخص فيها جميع ما ذكره المؤتمن / وذلك في الفصل الرابع من الجنس الخامس من كتابه ، وأذكر فيها جميع خواص هذه الأعداد ، وما ذكر أهل العلم فيها من الأسرار الروحانية والتناسبات العددية .

٢ - اثني عشر . اثنا عشر ، وهو جائز ، ولكنه يأخذ عادة بالنصب // ٣ - والاثنان عشر : والاثنى عشر // ٤ - والسبعون : والسبعين / منها : منها // ٥ - أول : أولاً // ٦ - منها : منها / منها : عدداً / أول : أولاً // ١٨ - المؤتمن : المؤتمن ، والمقصود هنا : ابن البهاء المراكشي في كتابه « تلخيص أعمال الحساب » //

**Matériaux Pour**  
**L'Histoire des Nombres Amiables**  
**et de L'Analyse Combinatoire.**

nous en avons joint deux autres. Dans le premier, d'al-Tanūkhī (1307), on rencontre un calcul du couple de Fermat; mais comme l'auteur y reprend des résultats connus, pour composer un traité manifestement destiné à l'enseignement, et non à l'exposé de découvertes, tout ceci laisse penser que le couple de Fermat était très vraisemblablement connu avant la fin du XIII<sup>ème</sup> siècle.

Viennent ensuite deux courts chapitres du traité d'al-Yazadī, "Les sources de l'arithmétique", on y trouve, avant Descartes, (de peu, il est vrai), le calcul du couple de nombres amiables qui porte le nom de ce dernier.

Quant au dernier texte, un chapitre du *Commentaire* d'Ibn Haydūr (mort en 1413) de *Talkhīṣ a'māl al-Ḥisāb* d'Ibn al-Banā', son principal intérêt est de montrer que le couple de Fermat n'a pas cessé d'être transmis, pour devenir l'héritage commun des mathématiciens tardifs.

Nous établissons donc, dans l'ordre:

1- Kamāl al-Dīn al-Fārisī : "*Mémoire aux amis pour démontrer l'amiableté*".

2- Al-Tanūkhī : un paragraphe de son "*Traité en arithmétique*".

3- Al-Yazadī : deux chapitres de son "*Sources de l'arithmétique*".

4- Ibn al-Banā' : un chapitre de son commentaire de sa propre arithmétique, "*Les dévoilement de "Talkhīṣ a'māl al-Ḥisāb"*". Sur l'établissement de ces textes, nous nous sommes expliqués dans l'Introduction arabe.

5- Ibn Haydūr : un chapitre de son *Commentaire* de *Talkhīṣ a'māl al-Ḥisāb* d'Ibn al-Banā'.

la théorie des nombres. Sans être encore purement arithmétique, il n'est plus cependant géométrique, et adopte de plus en plus d'aspects combinatoires et algébriques. Il ne faut pas oublier en effet qu'al-Fārisī, parfaitement informé de l'algèbre arithmétique selon la tradition d'al-Karājī et de son école, comme le laisse voir son grand commentaire du traité d'Ibn al-Khawām al-Baghdādī, procède en théorie des nombres au moyen de cette algèbre. Or c'est précisément ce style qui caractérisera la théorie des nombres jusqu'en 1640 au moins, même s'il demeure quelques survivances d'une terminologie et d'une représentation des nombres encore liées à la conception euclidienne.

Par ailleurs, plus encore que par les règles combinatoires qu'il comprend, le mémoire d'al-Fārisī s'impose en ce domaine par l'interprétation délibérément combinatoire des éléments du triangle arithmétique, et par l'usage qui est fait de ce dernier pour le calcul des ordres numériques. Afin d'évaluer, dans l'état actuel de notre connaissance, la distance parcourue, nous confrontons le mémoire d'al-Fārisī au texte, établi ici, de l'un de ses contemporains : Ibn al-Banā' (mort en 1321). Si cette étude n'atteint pas, de toute évidence, la généralité de celle d'al-Fārisī, elle laisse cependant penser qu'elles ont pu, l'une comme l'autre, profiter d'une longue tradition de travaux combinatoires. La connaissance que nous avons de cette tradition ne s'appuie encore que sur des témoignages tardifs, que nous reprendrons dans un prochain article. Nous nous contenterons, pour l'heure, d'en rappeler un, déjà évoqué ici, celui d'al-Yazādī<sup>(1)</sup>. On ne manquera pas alors de constater que l'analyse combinatoire s'est déjà constituée en un chapitre dont le souci de précision terminologique exprime la volonté d'autonomie.

Parmi les principaux résultats, on trouve :

$$(n)_r = n(n-1) \dots (n-r+1),$$

$$(n)_n = n !$$

$$A'_n = n^r$$

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

A ces deux textes, le mémoire d'al-Fārisī et le chapitre d'Ibn al-Banā'.

1. Voir al-Yazādī : *Sources de l'arithmétique*; ms. no 1993, E. Hacınezi, Süleymanîya, Istanbul, ff. 97v-99r.



# Matériaux Pour L'Histoire des Nombres Amiables et de L'Analyse Combinatoire.

ROSHDI RASHED

Les cinq textes que nous établissons ici, et qui tous étaient jusqu'à présent inédits, modifieront sans aucun doute notre connaissance de l'histoire de la théorie élémentaire des nombres, et de l'analyse combinatoire. Il apparaît en effet à leur lecture que de nombreuses découvertes, jusqu'ici attribuées à des mathématiciens du XVII<sup>ème</sup> siècle, si ce n'est plus tardifs encore, sont le fait de leurs prédécesseurs du XIII<sup>ème</sup> siècle. Ainsi plusieurs propositions, que l'histoire a baptisées des noms de Descartes, Montmort, l'abbé Deidier, entre autres, et qui se rapportent aux fonctions arithmétiques élémentaires, avaient déjà été énoncées et démontrées par Kamāl al-Dīn al-Fārisī, (mort en 1320 environ). D'autres, essentielles, sur l'analyse combinatoire, "l'usage du triangle arithmétique pour les ordres numériques", selon la fameuse expression de Pascal, apparaissent déjà elles aussi dans le mémoire du mathématicien du XIII<sup>ème</sup> siècle. C'est afin d'établir ces propositions qu'al-Fārisī dut s'assurer que tout nombre se décompose, et d'une manière unique, en un nombre fini de facteurs, énonçant ainsi le théorème fondamental de l'arithmétique, dont il tentait la démonstration. Encore faut-il ajouter à cela le calcul du couple de nombres amiables communément attribué à Fermat.

A peine évoqués, ces résultats suffisent à manifester l'importance de la contribution d'al-Fārisī à la théorie des nombres, c'est-à-dire à l'étude des parties aliquotes, des diviseurs, des nombres figurés et des fonctions arithmétiques élémentaires; aussi bien qu'à l'analyse combinatoire, dont l'intervention s'est alors imposée.

Nous n'entendons pas résumer ici ce que nous avons décrit ailleurs<sup>(1)</sup> en détail; il nous faut simplement rappeler que cette recherche fut suscitée par une autre, de portée plus restreinte certes: la re-démonstration, selon d'autres voies, d'un théorème de Thābit b. Qurra sur les nombres amiables, déjà prouvé par son auteur dans le meilleur style euclidien.

Non moins important que ces découvertes est le nouveau style que revêt

1. Voir R. Rashed: "Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII<sup>ème</sup> et XIV<sup>ème</sup> siècles", *Archives for History of Exact Sciences*", vol. 28, n°2, pp. 107-174, 1983; et "Remarques sur l'histoire de la théorie des nombres dans les mathématiques arabes", *Proceedings of the 16th International Congress of the history of Science (1981), Meetings on specialized topics*, pp. 255-261.

## القيصري

صاحب الرسالة في جمع أنواع من الأعداد  
(آيا صوليا ٤٨٣٧ ، ص ٨٥ب- ١٨٨)

### عادل أنبوبا

قد يكون من المفيد أن نجمع هنا بعض المعلومات عن القيصي ، صاحب الرسالة التي ننشرها « في جمع النواع من الأعداد » ، وهي معلومات متناثرة في مراجع شتى .

#### ترجمة القيصي

اسمه : أبو صقر عبد العزيز ( أو عبد الرحمن ) بن عثمان بن علي القيصي الهاشمي . والقيصري نسبة إلى قرية القيصية ، يقول ياقوت الحموي في معجم البلدان<sup>١</sup> : « القيصية قرية من أعمال شرقي مدينة الموصل بينهما مقدار فرسخين ، والقيصية أيضاً قرية أخرى قرب سامراء . وإلى واحدة منهما ينسب أبو صقر القيصي المنجم » .

حياته : جل ما نعرفه عن حياته ما جاء في الفهرست لابن النديم . قال ابن النديم في معرض كلامه عن خزانة كتب علي بن أحمد العمراني الرياضي الموصلية المتوفى سنة ٣٤٤ هـ : « واحد غلماننا أبو صقر القيصي ويقرأ عليه المجسطي في زماننا »<sup>٢</sup> . فيكون حسب تحصيلنا أن مولد القيصي لا يتأخر عن نحو سنة ٣٢٥ هـ . وكان أبو صقر لا يزال يدرس المجسطي في زمن تحرير الفهرست وهو سنة ٣٧٧ هـ . وقد عيّن الزركلي سنة وفاته نحو ٣٨٠ هـ وهو أمر جائز ونظنه تقديراً منه إذ أن المراجع المعروفة لا تذكر سنة لوفاة وليلاده . وتبع قول الزركلي عمر كحالة وإبراهيم خوري<sup>٣</sup> . ويستفاد من مقدمات بعض مؤلفات القيصي أنه عاش في كنف سيف الدولة - أمير حلب من سنة ٣٣٣ إلى ٣٥٦ هـ -<sup>٤</sup> وأبيه اهتدى

١ - ياقوت الحموي ، معجم البلدان ، ج ٤ ، بيروت ١٩٥٧ ، ص ٣٠٨ .

٢ - ابن النديم ، الفهرست ، القاهرة دون تاريخ ، ص ٣٨٥ . ينقل ابن القفطي عن ابن النديم قوله وبينهم من الفهرست ستة ٣٧٠ هـ وهو خطأ قد يكون من ناسخ أهل لفظة سبع . ( ابن القفطي - أخبار الحكماء ، القاهرة ١٩٣٦ ، ص ٤٧ ) .

٣ - الزركلي ، الأعلام ، طبعة ثانية ، ج ٤ ، ص ١٤٦ . وعمر كحالة ، معجم المؤلفين ، دمشق ١٣٧٧ / ١٩٥٨ ، ج ٥ ، ص ٢٥٢ . وإبراهيم خوري ، فهرس مخطوطات دار الكتب للطاهرية ، علم الهيئة وملحقاته ، دمشق ١٣٨٩ / ١٩٦٩ ، ص ٧٢ .

٤ - يأتي في سياق المقال .

أبو صقر بعض كتبه ، ووجود القيصي في بلاط سيف الدولة قد يخلص أيضاً من ترجمة سيف الدولة في وفيات الاعيان لابن خلكان\* . وشاهد القيصي في حلب يوماً امام القنطرة التي على باب انطاكية ، ومعه رجل ينقل له كتابة باليونانية كانت في القنطرة ، وكان فيها طالع المدينة ٦. ولا شك انه انتقل بعد وفاة سيف الدولة أو قبلها إلى عاصمة من العواصم كبغداد ، وهو الأرجح ، أو إلى الموصل وتابع التدريس ، كما قال ابن النديم ، والنجماء

مؤلفاته\*

١ المدخل إلى صناعة احكام النجوم<sup>٧</sup> ، وهو مهدي إلى الامير سيف الدولة ، منه مخطوط في القاهرة . تأخذ عن فهرست المكتبة الخديوية ج ٥ ، القاهرة ١٣٠٧ -

\* : حسنا في آخر الترجمة المصادر الغريبة مع الاختصارات الدالة عليها

٥ - ابن خلكان ، وفيات الاعيان ، تحقيق محمد عبد الحميد ، القاهرة ١٩٤٨ ، ج ٣ ، ص ٧٩ ، عدد ٤٥٤ .

٦ - ابن شداد ، الاعلاق الخليفة ، جزء اول قسم اول ، دمشق ١٩٥٣ ، ص ١٢ .

٧ - [Brockelmann] ، كركو نكيو ، علم الفلك عند العرب ، روما ١٩١١ ، ص ٢١١ .

لا نعلم حل وجه الضبط سنة تأليف " المدخل الى صناعة احكام النجوم " وغيره من المؤلفات الموضوعة يرسم سيف الدولة ، وليس في ضبط تاريخها كبير حاجة بعد ان حصراً في حبة ٣٣٣ - ٣٥٦ هـ . إلا ان الاسمان في وقائع اماره سيف الدولة على ما له من العائدة التاريخية قد يساعد على تصحيح الحقبة المذكورة . فتقول : لما دخل سيف الدولة حلب سنة ٣٣٣ اندلعت الحرب بينه وبين اخيه مصر وكانت سوريا تابعة له فقلب سيف الدولة على حلب مرتين ثم حل الصلح واستقر له الحكم فيها في ربيع ٣٣٦ واحذيتي لنفسه خارج المدينة قصرًا فخماً يطاول به قصر ممر الدولة السويحي ببغداد ، وكان لقصر سيف الدولة سور يدور عليه من ستة الاف ذراع او سبعة ، ويدخله من احد ابوابه المشك بالحديد يهرق من قويق كان لا يزال إلى سنة ١٩٤٠ م ، يسمي البساتين . (Sauvaget, p. 101) . وكان القصر يتسع لسيف الدولة وحاشيته ولشباب من العلماء ولألفي بدير والف واربعة نبل ما عدا الخيل والآلات الكثيرة والسلاح والمتاع والاموال (Canard fl. 654-656) . والتف حول سيف الدولة الكثير من الوجهاء والنفوس والعلماء والشعراء والفنيين والاطباء والمسجدين والقبل السمر عليه سنوات . ثم عاد ليدبر حول ٣٥٠ = اذ قويت شوكة البيزنطيين وددت عقارب الفتن والحواضر في الداخل واصيب سيف الدولة بفالج نصفي (Canard, pp. 648-649) . وفي شتاء ٣٥١ هـ هاجم تغلقور فوقوس مدينة حلب على حين غفلة فدخلها غرة وكسر سيف الدولة شرسمة وجب قصره واحرقه ، ولم يمد ببناء القصر وقل حضور سيف الدولة الى حلب (انظر ابن الجوزي المتظم ، ج ٢٧ حيدر آباد ١٣٥٨ هـ ، ص ٨ . ابن النديم ، تاريخ حلب ، تحقيق سمي الدمان ، ج ١ / دمشق ١٣٧٠ / ١٩٥١ ، ص ١٢٧ و ١٣٨ و ١٣٩ . ابن شداد ، الاعلاق الخليفة ، ص ١٦ ، ٢٩ . (Canard pp. 809-819, 658. Sauvaget p. 101) . ثم توالى على سيف الدولة الاسقام والاحزان والمصائب وتضعضعت احواله وقلت امواله وتوفي في صفر ٣٥٦ (Canard pp. 659-669) ويتضح مما سبق ان الاحتفال اقوى ان يكون القيصي قد وضع مؤلفاته بين ٣٣٧ و ٣٥٠ هـ أي في سني الاقبال .

١٣٠٨ هـ ، ص ٣١٦ ، ما يلي : « رتبة على خمسة فصول . الأول . في أحوال فلك الروح . الثاني : في طبائع الكواكب السبعة . الثالث : فيما يعرض لها . الرابع : في تفسير مسميات \* المنجمين . الخامس : في حمل السهام .

يحفظ من الكتاب عدة مخطوطات منها في استنبول ، فاتح ٣٤٣٩ ، ٢٠ ، ص ١٥٠ - ١٦٢ ، سنة النسخ ٥٨٧ هـ .

ويقول حاجي خليفة في كشف الظنون في باب مدخل : ١\* المدخل إلى علم النجوم بعض الأفاضل . اوله : الحمد لله الملك الحق المين \* الخ ، ألفه لسيف الدولة ، وجمع فيه من أقوال المتقدمين كلما يحتاج اليه في الصناعة وجعله على خمسة فصول . الاول في أحوال الفلك والبروج \* . الثاني في طبائع الكواكب السيارة . الثالث فيما يعرض لها . الرابع في تفسير سمات المنجمين . الخامس في السهام ٨ .

المدخل إلى علم النجوم لعبد العزيز بن عثمان القيصري . اوله : الحمد لله الملك المين الخ . جملة على خمسة فصول ٩ .

• : كذا في الأصل .

٨ - [Krause] ثم إن تشير إلى مخطوط آخر لمدخل القيصري لم يذكره بروكلمان وقد ذكره زكريا يوسف ، مؤلفات الكندي الموسيقية ، بغداد ، ١٩٦٢ ، ص ١٧ : Bodleian Oxford March 663. 1<sup>o</sup>. pp. 2-47 .

٩ - حاجي خليفة ، كشف الظنون ، طعة استنبول ، ج ٢ ، ١٩٤٣ ، عمود ١٦٤٢ . ونسج حاجي خليفة في دعواه ، الراوي في تاريخ علم الفلك في العراق ، بغداد ١٩٥٨ ، ص ١٢٥ ونذكر مقنة المدخل كما وردت في مخطوط أكسفورد مع شكرنا لإدارة المكتبة .

بسم الله الرحمن الرحيم  
وب الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الملك الحق المين . اما بعد مسئلة قد عر وجل اطالة بقاء مولانا الامير سيف الدولة ودوام عزه وحراة نمه وامتداد دولته ، واني لما رأيت جماعة من المتقدمين في صناعة احكام النجوم قد عمدوا كتباً سموها مدخلا الى هذه الصناعة ، وبعض لم يتقص على جميع ما يحتاج فيها مما يصلح ان يكون مدخلا ، وبعض حول فيه . اترى فيما لا يحتاج اليه فضاء فيه ما يحتاج اليه ، وبعض لم يسل في ترتيبه طريق التعليم ؟ ألمعت هذا الكتاب وحملت مدخلا وحيث فيه من اقوال المتقدمين كل ما يحتاج اليه في الصناعة على سبيل المدخل . ولم احضر الاجماع على ما حث به ، اذ كان ذلك في كتاب بطليموس المعروف بالاربعة . وفي كتاب اثبات صناعة الاحكام النجومية ونقص رسالة علي بن عيسى في ابطالها ، من الاحجاج ، ما فيه عني ٢ عن ذلك . وجملة خمسة فصول . الفصل الاول\* : في أحوال فلك البروج الذاتية والعرضية . الفصل الثاني : في طبائع الكواكب السبعة وما يختص به [ كل واحد منها ] وما يدل عليه [ من الاحوال ] . الفصل الثالث : فيما يعرض للكواكب

١ مداخلا ٢ - غنا •• الفصل الاول في فطاق فلك البروج الذاتية والعرضية الخ . ( في المخطوط )

وبين ان حاجي خليفة قد وهم وان المؤلفين كتاب واحد لمنجم واحد ١٠. ومن ذكر كتاب المدخل هذا البيهقي والاكفاني والقلقشندي ١١.

نقل الكتاب الى اللاتينية يوحنا الاشيلي ١٢ الذي اردهر في طليطلة في نحو ١١٣٥ إلى ١١٥٣ م. ثم وضع له شرحا يوحنا السكسوني سنة ١٣٣١ م بباريس وكان للشرح شأنه ١٣. وبعد ظهور الطباعة طُبعت الترجمة اللاتينية مرارا في البندقية سنة ١٤٨١ ، ١٤٨٥ ، ١٤٩١ ، ١٥٢١ . وطبع الشرح في بولونيا بإيطاليا سنة ١٤٧٣ ، ثم في البندقية سنة ١٤٨٥ ، ١٥٢١ ، ذبلا على الترجمة اللاتينية ١٤. وفي البندقية ايضا سنة ١٤٩١ ، ١٥٠٢ ، ١٥٠٣ ، ١٥١٣ ، وباريس سنة ١٥٢٠ . ١٥. وكان پلران ده پوس Pélérin de Pouesse قد نقل الى الفرنسية نص المدخل اللاتيني وذلك سنة ١٣٦٢ م ١٦. وتحتفظ مكتبة شارتر بفرنسا بمخطوط من القرن الميلادي ١٢ فيه ترجمة يوحنا الاشيلي . وفي نفس القرن استعان بكتاب القيصي عالم من مرسيليا في فرنسا ١٧.

ونقل كتاب المدخل في الأجيال الوسطى إلى العبرية ايضا ، ولا تزال الترجمة محفوظة ١٨ كل هذا يدل على مدى شهرة القيصي آنذاك وانتشار مؤلفه . وسمي القيصي باللاتينية Alchabitius, Alcabitius ١٩ . ويرجح نلينو ان القيصي قد تأثر بمنجم

الكعبة في انفسها وما يعرض لبعضها عند بعض . الفصل الرابع : في تفسير سمات المنجمين . الفصل الخامس : في جبل السهام .

١٠ - وقد نبه نلينو ايضا الى وهم حاجي خليفة ( نلينو ، المصدر المذكور ، ص ٧٨ ) .

١١ - البيهقي : تاريخ حكماء الاسلام ، دمشق ١٩٤٦ ، ص ٩٢ . الاكفاني : ارشاد القاصد ، بيروت ١٣٢٢ هـ ، ص ٩٤ . القلقشندي : صحيح الاعشى ، ج ١ ، مصر ١٩١٣ ، ص ٤٧٥ .

١٢ - الرجل متعدد الاسماء وثمة شك في هويته انظر Duham b. Sarton I

١٣ - انظر Duham c, Suter III

١٤ - Suter III

١٥ - Duham c

١٦ - Sarton I

١٧ - Duham b

١٨ - Suter II

١٩ - Suter III

فارسي عاش في آخر دولة بني ساسان أو في القرن الأول الهجري وهو الأندرس زغر بن زادا نغروخ ، ويجد في ذلك دليلا يضاف إلى أدلة أخرى عن انتشار العلوم المبكر عند العرب<sup>٢٠</sup> .

<sup>٢١</sup> كتاب في قرانات الكواكب الميارة لا يعرف إلا من ترجمته إلى اللاتينية ، قام بها يوحنا الاشيلي وطبع في البندقية ١٤٨٥ ، ١٥١١ ، ١٥٢١ ، في ذيل كتاب المدخل . ثم نشر اورونس فينه Oronce Fine ترجمة فرنسية للكتاب في باريس ١٥٥٦ أو ١٥٥٧ ويرى شتينشيلر Steinschneider ان هذا الكتاب مستخرج من الفصلين ٤ و ٥ من كتاب المدخل وليس كتابا مستقلا<sup>٢٢</sup> ولم يثبت احد في دعوى شتينشيلر وليس في عنوان الفصلين شيء ظاهر يدعم هذه الدعوى كما انه يصعب في هذه الحال ان تتوالى طبعاته في ذيل الكتاب الاول .

<sup>٢٣</sup> رسالة في جمع انواع من العدد آيا صوفيا ٤٨٣٢ ، ١٧ ، ٨٥ ب - ١٨٨ . النسخة من القرن ٥ هـ . وضعها القبضي حدمة لسيف الدولة . وهي الرسالة التي نشرها اليوم .

<sup>٢٤</sup> رسالة في الأبعاد والاجرام ، آيا صوفيا ٤٨٣٢ ، ١٨ ، ٨٨ ب - ١٩٤ ، مخطوط من القرن ٥ هـ . اولها : رأيت اطال الله بقاء الامير صيف الدولة أكثر اهل العلم ... ذكر هذه الرسالة موسى بن ميمون العالم الاسرائيلي المشهور ( ت نحو ٦٥٠ هـ ) في كتابه دلالة الحائرين<sup>٢٥</sup> .

<sup>٢٥</sup> ما شرحه من كتاب الفصول للفرغاني آيا صوفيا ٤٨٣٢ ، ١٩ ، ٩٤ ب - ١١٤ ب ، النسخة من القرن ٥ هـ .

وقد أشار المستشرق Max Krause إلى الرسائل ٣ ، ٤ ، ٥ وعنه نقلت المعلومات المتعلقة بمخطوطاتها<sup>٢٦</sup> .

٢٠ - علم التلك عند العرب ص ٢١١

٢١ - Suter J, II ; Sarton I

٢٢ - Suter I

٢٣ - Dahem a . انظر ايضاً : " دلالة الحائرين " :

S. Murk, Le guide des égarés ... par Moïse b. Maamoun (texte arabe et trad. franc.) 3 vols., Paris (1856-1866) 2<sup>e</sup> partie, ch XXIV, tome 2, p. 191

Krause - ٢١

٦ رسالة في امتحان المنجمين تحوي ثلاثين مسألة واجوبتها . اولها : رسالة عبد العزيز ابن عثمان القبيصي المنجم إلى الامير سيف الدولة . آخرها : فهذا ما امكن في هذا الوقت ان اجمعه من حفظي على حسب الحال . وهي مخطوط في الظاهرية بدمشق ، ٦ ورقات والصفحة ٣٥ سطرا ٢٥ .

٧ رسالة في الهيئة ، نحو تسع ورقات ، The Chester Beatty Library, A Handlist, of the Arabic Manuscripts, Tome VII, by A. J. Arberry, Dublin 1964 No 5254, 6<sup>o</sup> fol. 244-52

النسخة بتقديرًا من القرن ١٠ هـ ٢٦

٨ نقص رسالة عيسى بن علي في ابطال احكام النجوم ، ( ولعله عيسى بن علي بن عيسى ابو القاسم ابن الورير ، وهو محدث معروف كان مطلعا على علوم الأوائل وقرأ المطلق على يحيى بن عدي ، ذكره ابن القفطي في كتابه ٢٧ ) ذكر هذا الكتاب ٨ في صدر المدخل إلى صاعقة النجوم انظر الحاشية ٩ . ٢٨

٩ رسالة في مساحة الارض ، ذكرها في رسالة جمع انواع من الأعداد ٣ ( وجاء في المخطوط مسافة الارض ) .

١٠ كتاب النمودارات ( في قراءة الطوالع ) : ذكره في المدخل ٦ في بدء الفصل الرابع مخطوط المكتبة البديلية اكسفر دمارش ٦٦٣ ص ٣٢ ) . وانظر الحاشية ٢٩

١١ المسائل والاختيارات فيها ٢٢ مثلة يتمحن بها المنجمين كانت في مكتبة عباس الزاوي ٣ ولا شك ان للقبيصي مؤلفات كثيرة غير هذه ، فضرورات التعليم واحكام الزمان كانت تقضي على العلماء بالتأليف في شتى ابواب معارفهم تلبية

٢٥ - ابراهيم غوري ( انظر الحاشية ٢ ) ص ٦ .

٢٦ - تاريخ وفاة القبيصي في القهرست المذكور غلطه .

٢٧ - اخبار الحكماء ص ١٦٣ .

٢٨ - وكان قد ذكره زوتر Suter II

٢٩ - Suter II . ويوجد في الاسكوريال بمديريه مخطوط : كلام في التيسودر لتصحيح طوالع المواليه

H. Derenbourg et H. - P. - J. Renaud,

مستخرج من كتاب مفتاح الاسرار لابن الكباد

Les Manuscrits Arabes de l'Escurial, T.2, fasc. 3, Paris 1941, n° 939, p. 54.

٣٠ - عباس الزاوي ، علماء الرياضيات والملك في العراق في عهد آل بويه . مجلة سومر بغداد ، مجلد

٢٤ ص ١٣٩ - ١٦٩ . انظر ص ١٤٧ . يظهر وكأن جملة دحيبة قد اصبحت الى عنوان الكتاب .

لطلبات المتعلمين ، هذا بالإضافة إلى تأليفهم العلمية الصرفة . وكان القيصي يقول الشعر ، ويذكر له ياقوت الحموي ابياتاً ثلاثة قالها في صديق وعنده وأخلّ بوعده<sup>٣١</sup> . ويورد ابن خلكان في ترجمة سيف الدولة بعض ابيات نسبها بعضهم الى سيف الدولة ، ونسبها آخرون إلى القيصي<sup>٣٢</sup> ، وهي من اشعار مجالس الطرب ؛ في بيت منها تشبيه بقوس قزح :

يُطرزها قوس السحاب بأصفر  
على احمر في اخضر تحت مبيض

وظن المؤرخ الفاضل جورج سارتون انها قصيدة في قوس قزح<sup>٣٣</sup> . وليس الامر كذلك ، وليست هي من نوع المنظومات التي وضعت في علم الهيئة او الحساب او غيره ، كقصيدة الفزاري والصوفي ونصير الدين الطوسي وغيرهم<sup>٣٤</sup> .

٣١ - ياقوت مصمم البلدان ج ٤ بيروت ١٩٥٧ ، ص ٣٥٩ .

٣٢ - انظر الحاشية ه . وذكر ابو القاسم الحسين بن علي المغربي كاتب سيف الدولة انه ينسب الى سيف الدولة اشعار كثيرة لا يصح منها له غير اثنين (ابن العديم ، تاريخ حلب ، تحقيق سامي الدعان ، ج ١ ، دمشق ١٩٥٩ ، ص ١٥٢) .

٣٣ - Barton II - ٣٢

٣٤ - قصيدة محمد بن ابراهيم الفزاري معروفة وكذلك ارجوزة عبد الرحمن الصوفي . ان نصير الدين الطوسي قلّه قصيدة في اختيارات البروج الثاني عشر ، ذكرها آقا بزرك في الديرية ج ١٧ ، تهران ١٩٦٧ ، ص ١٢٤ ، عدد ٦٥٠ . وله المدخل في علم التنجيم منظوم ذكره حاجي خليفة ، كشف الظنون ، استبول ١٩٤٣ ، ج ٢ ، عدد ١٦٤٤ .



## رسالة القيصي في جمع أنواع من الأعداد

لقد جمع أبو صقر القيصي المتحم ، في هذه الرسالة ، طرائف قديمة من الحساب راد عليها من اشكاراته . ولعله اضاف من عنده جمع مربعات مربعات الأعداد الصحيحة وجمع نضاعيف بيوت الشطرنج اذا وُضع في كل بيت ضعف ما في البيوت السابقة جميعا . ورسالته اقدم مؤلف وردت فيه هاتان القضيتان . وختم الرسالة بمعرفة ارتفاع مكانه عال بعمل ساه على المثلثات والجيوب . والرسالة مهداة إلى سيم الدولة الحمداني امير حلب ( ٣٣٣ - ٣٥٦ هـ ) . ويحفظ من هذه المقالة مخطوط فريد هو آيا صوفيا ٤٨٣٢ ، ١٧ ، ٨٥ ب - ١٨٨ نسخ في القرن الخامس الهجري وتضم الصفحة ٣٢ سطراً . ولم نجد لرسالة القيصي ذكراً في المراجع القديمة .

### ملاحظات

المخطوط بخط جميل واضح وكثيرا ما ترد فيه الحروف غير منقطة .  
يميل الناسخ إلى عدم اعراب الأعداد احيانا فيكتب اثنين بدلا من اثنان ، ستين بدلا من ستون .  
نضع في الحواشي السفلية الالفاظ الخاطئة كما وردت في المخطوط .

## رسالة ابي صقر القبيصي في انواع من الاعداد وطرائف من الاعمال

أيا صوفيا ٤٨٣٢ ص ٢٨٥ - ١٨٨

بسم الله الرحمن الرحيم العزة لله

٥٨ ب

رسالة ابي الصقر عبد العزيز بن عثمان القبيصي في انواع [ من ] الاعداد  
وطرائف من الاعمال مما جمعه من متقلمي اهل العلم بهذه الصناعة .

بما كان مولانا سيف الدولة ، اطال الله بقاه ، بعلو همته وفضل قريحته ،  
يبحث عن كل ادب شريف وعلم لطيف ، وكان العلم بصناعة الحساب من احسن  
العلوم والنظر فيه من ادق النظر ، رأيت قد بلغ من الدربة الى ان يعمل بيده الغالية  
من الحساب ما لا يقدر عليه جماعة من الحساب الموصوفين إلا بالهندي ، فاحبت  
التقرب من خدمته بجميع ما يقع اليّ من محاسنه الشريفة ومعانيه اللطيفة ، وكان قد  
وقع إليّ ابواب في احتصار جمع انواع من الاعداد ، متفرقة في مواقع شتى ،  
جمعتها في هذه الرسالة وازفت اليها ابوابا استخرجتها لم اقرأها لاحد تقدمي ،  
واتعت ذلك باصعاف بيوت الشطرنج واريت من عظم هذا العدد ما يكبر في نفوس  
كثير من الناس وجعلته احد عشر باباً .

### الباب الأول :

إذا اردت ان تجمع الاعداد التي من الواحد على النظام [ الطبيعي ] إلى كم  
شئت ، فتخذ آخر الاعداد التي تريد ان تجمعها فاضربه في نفسه ثم زد على ما خرج  
جزره وخذ نصف جميع ذلك فما كان فهو جمعها . مثال ذلك : انك اردت ان  
تجمع واحداً واثنين وثلاثة واربعة وكذلك إلى العشرة ، فتأخذ آخر الاعداد وهو  
عشره ، فتضربها في نفسها فيكون مائة ، ثم تزيد عليها جزرها وهو عشرة فيكون

الجميع مائة وعشرة ، فتأخذ نصفها وهو خمسة وخمسون ، وهو جمعها ، وكذلك الى ما اردت من الاعداد . واحد اثنان ٢ ثلاثة اربعة خمسة ستة سبعة ثمانية تسعة عشرة ؛ فذلك الجميع خمسة وخمسون .

### الباب الثاني :

إذا اردت ان تجمع الاعداد الافراد من الواحد على النظام الطبيعي الى ما احببت ، فخذ العدد الزوج الذي يلي آخر الاعداد التي تريد ان تجمعها بعده ، وخذ نصفه فاضربه في نفسه ، فما كان فهو جميع الافراد التي اردت ان تجمع ، وهذا العدد ابدا يكون مربعا اعني له جذر صحيح . مثال ذلك : انك اردت ان تجمع الاعداد الافراد من الواحد الى التسعة ، فتأخذ العدد الزوج الذي يلي التسعة بعدما وهو عشرة ، فتأخذ نصفه وهو خمسة ، فتضربها في نفسها فيكون ٢٥ وهو جميع الاعداد الافراد من الواحد الى التسعة . وكذلك الى ما اردت من الاعداد الافراد . واحد ثلاثة خمسة سبعة تسعة الجميع ٧٥ .

### الباب الثالث :

إذا اردت ان تجمع الاعداد الأزواج من الاثنين على النظام الطبيعي الى ما اردت ، فاضرب نصف العدد الزوج الذي هو آخر الاعداد الأزواج التي تريد ان تجمع في اكثر من النصف بواحد ، فما كان فهو جميع تلك الاعداد الأزواج . مثال ذلك : اردت ان تجمع من اثنين الى ١٢ فتضرب نصف ١٢ وهو ٦ في اكثر من ٦ بواحد ، وهو ٧ ، فيكون ذلك ٤٢ ، وذلك جميع الاعداد الأزواج التي من ٢ الى ١٢ . وكذلك الى ما اردت من الاعداد الأزواج . فان احببت ان تأخذ نصف آخر الأزواج وهو ٦ فتأخذ من واحد الى ٦ كما اريتك في الباب الاول فيكون ١٢ ، ثم تضعف ذلك فيكون ٤٢ وهذا جمعه ٢٠٤٦٨١٠٢٢ فذلك الجميع ٤٢ .

### الباب الرابع

إذا اردت ان تجمع الاعداد التي يقال لها المدرجة على النظام الطبيعي وهو ان تجمع ضرب واحد في ٢ وضرب ٢ في ٣ وضرب ٣ في اربعة وكذلك الى اي عدد شئت ، فخذ العدد الذي هو آخر الاعداد التي ذكرت والعدد الذي هو أكثر منه

بواحد والعدد الذي هو اقل منه بواحد ، فيكون ذلك ثلاثة اعداد لاحدها ثلث صحيح ،  
فتضرب احد العددين اللذين ليس لكل واحد منهما ثلث صحيح احدهما في الآخر ،  
وما اجتمع ضربته في ثلث العدد الذي له ثلث صحيح فما كان فهو | ما يجتمع من ١٨٦  
الاعداد المدرجة . مثال ذلك : انك اردت ان تجمع ضرب واحد في اثنين و ٢ في ٣ و ٣  
في ٤ وكذلك الى ٩ في ١٠ ، فتأخذ آخر الاعداد وهو ١٠ واكثر منه بواحد ١١  
واقل منه بواحد ٩ ، والسبعة من هذه الاعداد لها ثلث صحيح ، فتضرب ١٠ في ١١  
فيكون ١١٠ وتضرب ذلك في ثلث ٩ وهو ٣ فيكون ذلك ٣٣٠ وهو ما يجتمع من  
الاعداد المدرجة الى ٩ في ١٠ ، وكذلك الى ما اردت من الاعداد المدرجة . وهذا  
مثاله : واحد في اثنين ٢ ، اثنان في ثلاثة ٦ ، ثلاثة في اربعة ١٢ ، اربعة في خمسة ٢٠ ،  
خمسة في ستة ٣٠ ، ستة في سبعة ٤٢ ، سبعة في ثمانية ٥٦ ، ثمانية في تسعة ٧٢ ،  
٩ في ١٠ فذلك الجميع ثلثمائة وثلاثون ٤ .

### الباب الخامس :

إذا اردت ان تجمع الاعداد التي على الضعف من الواحد ، وهو الذي يعرف  
باضعاف بيوت الشطرنج ، فاضرب ضعف الواحد في نفسه فيخرج لك الضعف  
الذي [ هو ] اقل من ضعف الثاني بواحد وهو الثالث ، \* فان نقصت من ذلك  
واحدا كان الباقي جميع ما في البيت الاول والثاني وان لم تنقص منه واحدا وضربته  
في نفسه خرج لك الضعف الذي هو اقل من ضعف الثالث بواحد وهو الضعف الخامس  
فان نقصت من ذلك واحدا كان جميع ما في البيت الاول والثاني والثالث والرابع .  
مثال ذلك : انك اردت ان تضعف الواحد بعدد بيوت الشطرنج فكم \* جميع  
ذلك ؟ فانك تضرب ما في البيت الثاني في نفسه فيكون ما في البيت الثالث وهو  
اربعة ، فإن نقصت من الاربعة واحدا بقيت ثلاثة وهو ما في البيت الاول والثاني ،

$$\begin{array}{r} ٤ - \text{اثنين} \\ ٤ - \text{واحد} \\ = \text{البيوت} ١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٥ \quad ٦ \quad ٧ \quad ٨ \quad ٩ \quad ١٠ \end{array}$$

فإذا ضرب ما في البيت الثاني في نفسه خرج ما في البيت الثالث :  $١ - ٢ \times ٢$   
وإذا ضرب ما في البيت الثالث في نفسه خرج ما في البيت الخامس :  $١ - ٢ \times ٣$   
وقد عني بالضعف تارة مثل العدد وتارة ما في البيت الواحد . ضعف الواحد في نفسه : اي ٢ في نفسه .  
الضعف الذي هو أقل من ضعف الثاني بواحد : العدد الذي مرتبته ضعف مرتبة الثاني الا واحدا .

٥ - وكم

واذا ضربت ما في البيت الثالث في نفسه خرج ما في البيت الخامس وهو ١٦، فان نقصت منه واحدا بقي خمسة عشر وهو جميع ما في البيت الاول والثاني والثالث والرابع ، واذا ضربت ما في البيت الخامس في نفسه كان ذلك ما في البيت التاسع وهو ٢٥٦ ، فان نقصت من ذلك واحدا كان الباقي جميع ما في البيت الاول والثاني والثالث والرابع والخامس والسادس والسابع والثامن . واذا ضربت ما في البيت التاسع في نفسه خرج ما في البيت السابع عشر ، فاذا نقصت من ذلك واحدا كان جميع ما في [ البيوت ١٦ ] ٦ واذا ضربت ما في البيت السابع عشر في نفسه خرج ما في البيت ٣٣ ، واذا نقصت ٣٣ في البيت ٣٣ واحدا كان الباقي جميع ما في البيوت ٣٢ ، واذا ضربت ما في البيت ٣٣ في نفسه كان ذلك ضعف ما في البيت الرابع والستين ٨ فان نقصت من ذلك واحدا كان الباقي جميع ما في البيوت ٦٤ وان تنصفه ٩ قبل نقصان الواحد كان الباقي ١٠ ما في البيت ٦٤ . وانا اين جملة ذلك آخر هذه الرسالة واشياء تليق بذلك الموضع من عظم ما يجتمع من هذا العدد .

### الباب السادس :

اذا اردت ان تضعف بيوت الشطرنج اضعافا آخر هو اعظم من هذا وهو ان تجعل في البيت الأول واحدا وفي الثاني اثنين ، وفي الثالث ضعف ما في البيتين جميعا اللذين قبله وذلك ستة ، وفي الرابع ضعف جميع ما في البيوت التي قبله وذلك [ ثمانية عشر ، وفي الخامس ضعف جميع ما في البيوت التي قبله ] وذلك اربعة وخمسون ١١ ، وكذلك الى ما اردت ونابه ان تضرب ما في البيت الثاني في نفسه وتزيد على ما خرج من الضرب نصفه فيكون ما في البيت الثالث ، ثم تضرب ما في البيت الثالث في نفسه وتزيد على ما خرج من الضرب نصفه فيكون ما في البيت الخامس ، ثم تضرب ما في البيت الخامس في نفسه وتزيد عليه نصفه فيكون ما في البيت التاسع ، وتضرب ما في البيت التاسع في نفسه وتزيد على ما خرج نصفه فيكون

٦ - البيت السادس عشر . هنا في الحاشية جملة غير مستقيمة ولا يرى موقعها في النص .

٧ - ٢٢

٨ - وستين

٩ - نصفه

١٠ - كلفا في المخطوط ولعل الصواب : كان الحاصل

١١ - وخمسين

ما في البيت ١٧ ، ويجري الامر في ترتيب البيوت كما جرى في الباب الذي قبل هذا الى ان يخرج لك ما في البيت الخامس والستين ١٧ فتصممه فقط فيكون جميع ما في البيوت ٦٤ . مثال ذلك : إنا اذا ضربنا ما في البيت الثاني في نفسه وهو اثنان كان اربعة فاذا زدنا عليها نصفها صارت ستة وهي ما في البيت الثالث ، وهي ضعف ما في الاول وهو واحد والثاني وهو اثنان ١٣ . فاذا ضربنا ما في الثالث في نفسه كان ٣٦ فاذا زدنا عليها نصفها صارت ٤٤ ، وذلك انه إذا كان في الثالث ٦ فانه يصير في الثلاثة ٩ ففي الرابع ١٨ فيكون في الاربعة ٢٧ ، ففي الخامس ضعفها وهي ٥٤ . فإذا ضربت ٤٤ في نفسها فان ذلك ٢٩١٦ ، فاذا زدنا عليها نصفها صارت ٤٣٧٤ وهو ما في البيت التاسع ، لانه اذا كان في البيت الخامس ٥٤ فان جميع ما في البيوت الخمسة ٨١ ، ففي السادس ١٦٢ ، ففي السبع البيوت ٢٤٣ ، ففي البيت السابع ٤٨٦ ، فيكون جميع ما في البيوت السبعة ٧٢٩ ، ففي البيت الثامن ١٩٥٨ ، فجميع ما في الثمانية البيوت ٢١٨٧ ، ففي البيت التاسع ٤٤٧٤ . وكذلك الى ان يخرج ما في البيت الخامس وستين ، فتصممه فيكون جميع ما في بيوت السفرة . وكذلك الى ما اردت من الاضعاف

### الباب السابع :

إذا اردت ان تجمع الاعداد التي يقال لها المربعات وهي الاعداد المجنونة من الواحد الى ما اردت على النظام الطبيعي فتأخذ جذر آخر الاعداد التي تريد ان تجمعها ، فاضربه في أكثر منه بواحد ، ثم ما اجتمع في ضعف ذلك الجذر وزده واحدا ، وتأخذ سلس ما اجتمع فما كان فهو جميع الاعداد المربعات التي اردت . مثال ذلك : انك اردت ان تجمع الاعداد المجنونة من الواحد الى ٢٥ فتأخذ جذر ٢٥ وهو ٥ ، فتضربه في أكثر منه بواحد فيكون ٣٠ ، ثم تضرب ذلك في ضعف الجذر وهو عشرة وزيادة واحد وذلك ١٦٠ ، فيكون ٣٣٠ ، فتأخذ سلسها وهو ٥٥ وهو جميع الاعداد المجنونة من الواحد الى ٢٥ . وكذلك الى ما اردت من الاعداد المجنونة ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ فذلك الجميع ٥٥ .

## الباب الثامن :

إذا أردت أن تجمع الأعداد المكعبة التي من الواحد إلى ما أردت على النظام الطبيعي ، والعدد المكعب هو ما يكون من ضرب عدد في نفسه وما اجتمع في جذره ، وذلك الجذر هو ضلع المكعب . مثل الثمانية فإنها تكون من ضرب اثنين في اثنين وما اجتمع في اثنين فيكون ثمانية وهي المكعب وضلعها اثنان<sup>١٤</sup> . وكذلك سبعة وعشرون<sup>١٥</sup> عدد مكعب ، وضلعها ثلاثة ، لأن ثلاثة في ثلاثة تسعة ثم تسعة في ثلاثة ٢٧ . فإذا أردت ذلك فأعرف ضلع المكعب الذي هو آخر العدد المكعب الذي تريد جمعه ، فاجمع من الواحد إليه على النظام الطبيعي . كما بينت ذلك في الباب الأول من هذه الرسالة ، فما كان فاضربه في نفسه ، فما اجتمع فهو جميع الأعداد المكعبة التي تريد جمعه . مثال ذلك : أنك أردت أن تجمع الأعداد المكعبة من الواحد إلى الألف . فتأخذ ضلع مكعب الألف وهو عشرة فتأخذ من الواحد إلى العشرة على النظام الطبيعي وهو كما ذكرت في الباب الأول ٥٥ ، فتضربها في نفسها فيكون ذلك ٣٠٢٥ ، وذلك هو جميع المكعبات من الواحد إلى الألف . ونحن نذكر تحت كل مكعب ضلعه

واحد ثمانية سبعة وعشرين	٦٤	١٢٥	٢١٦	٣٤٣	٥١٢	٧٢٩	الف
واحد اثنين ثلاثة	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
فذلك	٣٠٢٥						

## الباب التاسع :

إذا أردت أن تجمع الأعداد التي هي مربعات المربعات من الواحد إلى ما أردت على النظام الطبيعي ، ومربع المربع هو ما يحدث من ضرب عدد في نفسه وما اجتمع في نفسه مثل ١٦ فإنها تحدث [ من ضرب ٤ في ٤ ] في نفسها وذلك ٤ و ٤ في نفسها وهي ١٦ فالسعة عشر مربع المربع وضلعه اثنين وكذلك ٨١ فإنها من ضرب ٩ في ٩ فيكون ذلك ٨١ ثم في ٩ وذلك ٨١ وضلعها ثلاثة ، فإذا أردت جمعها فخذ ضلع آخر المربعات التي تريد جمعها فاضربه في نفسه وزد على ما اجتمع مثل نصف

١٤ - اثنين

١٥ - وعشرين

العدد المضروب في نفسه ، فما بلغ فاضربه في العدد الذي هو أكثر من المضروب في نفسه بواحد ، فما كان فهو صحاح بغير كسر فاحفظه . ثم اصرب خمُس العدد المضروب في نفسه وريادة خمُس واحد في العدد المضروب في نفسه فما بلغ فانقص منه ثلثي عشر واحد ، فما بقي فاضربه فيما كنت حفظت ، فما بلغ فهو مجموع مربعات المربعات التي اردت جمعها . مثال ذلك : اردت ان تجمع من الاعداد التي هي مربعات المربعات من الواحد الى الالف وما بين وست وتسعين التي هي مربع مربع الستة ، فتأخذ ضلع العدد المربع الذي هو اخر الاعداد التي تريد ان تجمعها وهي ستة فتضربها في مثلها فيكون ٣٦ ، وتزيد على ذلك مثل نصف الستة فيصير ٣٩ ١٧٨ فتضربها في العدد الذي هو | أكثر من ٦ بواحد وذلك ٧ فتصير ٢٧٣ فتحفظها .

ثم تضرب خمُس ٦ وهو واحد وخمُس وريادة خمُس واحد وذلك ١٦ في ٦ فيكون ذلك ٩٧ فتسقط منه ثلثي عشر واحد فيبقى ثمانية وثلث ،

فتضربها فيما كنت حفظت وهو ٣٧٢ فيكون ذلك ٢٢٧٥ ، وذلك جمع مربعات المربعات التي اضلاعها من واحد الى الستة . وكذلك الى ما اردت ، وقد اثبت ضلع كل عدد منها نحوه :

$$\begin{array}{r} \text{واحد} \quad ١٦ \quad ٨١ \quad ١٨٢٥٦ \quad ٦٢٥ \quad ١٢٩٦ \\ \text{واحد} \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٥ \quad ٦ \quad \text{فيكون الجميع} \quad ٢٢٧٠ \end{array}$$

### الباب العاشر :

اذا اردت ان تجد الاعداد التامة ، والعدد التام هو الذي جميع اجزائه الصحاح مساوية له ، ومعنى اجزائه ١٩ الصحاح الاعداد التي تعده فتقسمه . فلنقدم قبل ما يحتاج اليه في علم ذلك ، وذلك ان في الاعداد اعدادا يقال لها أول العدد . والعدد الأول هو الذي لا يعده إلا الواحد فقط ، مثل ٣ فان الثلاثة لا يعدها إلا الواحد

$$١٦ - ٥١$$

$$١٧ - ٥٨$$

$$١٨ - ٢٥٢$$

$$١٩ - \text{اجزاء}$$



فقط ، وكذلك الخمسة والسبعة و ١١ و ١٣ . فان كل واحد من هذه الاعداد لا يعده الا الواحد فقط . ومنها العدد المركب وهو الذي يعده عدد اخر ، مثل ٦ فانها يعدها ، ثلث مرات ، ويعدها ٣ مرتين . ومثل ١٢ فانها يعدها ، ست مرات و ٣ أربع مرات و ٤ ثلث مرات ويعدها ٦ مرتين . ومثل ١٥ فانها يعدها ٣ خمس مرات ويعدها ٥ ثلث مرات . فان هذه الاعداد يقال لها مركبة . وفي الاعداد اعداد يقال لها متباينة وهي الاعداد التي لا يعدها جميعا الا الواحد مثل خمسة وثمانية فانه لا يعدها الخمسة فتقيسها ٢٠ ولا يعدها الثمانية فتقيسها ٢٠ ايضاً ، [ فلا يعدها ] غير الواحد فقط . ومثل ٦ و ٧ فانه لا يعد ٦ فقيسها ٢٠ ويعد ٧ فقيسها ٢٠ عدد غير الواحد فقط . ومنها اعداد يقال لها المشتركة وهي الاعداد التي يعدها جميعا عدد فقيسها ٢٠ مثل ٦ و ٩ فان ٣ تعد ٦ وتعد هي ايضاً ٩ فالسنة و ٩ عددان مشتركان ٢٠ في الثلثة . وكذلك ١٠ و ١٦ فان الاثنين يعد ١٠ وهي ايضاً تعد ١٦ فالعشرة والستة عشر مشتركان ٢٠ في الاثنين . وكذلك ١٢ و ١٥ فانهما مشتركان في الثلثة اذ الثلثة تعدهما جميعا . فاذ قدمنا هذا فلنذكر كيف نجسد العدد التام فنقول : إذا اردت ذلك فخذ الاعداد التي تتضاعف من الواحد والواحد معها ، فان كان جميع ذلك عددا اول ضربت ذلك في آخر الاعداد التي انتهت اليها المتضاعفة من الواحد ، فما اجتمع فهو عدد تام . مثال ذلك أنك اخذت الواحد والاثنين التي هي ضعف الواحد فيكون ذلك ثلثة وهو عدد اول لأنه لا يعد الثلثة الا الواحد فقط ، فتضرب الثلثة في الاثنين التي هي آخر الاعداد التي اخذت فيكون ٦ وهو عدد تام وهي اول الاعداد التامة لان الواحد يعدها والاثنين والثلثة يعدها وجميع ذلك ستة ، وليس يعدها عدد آخر غير هذه . وكذلك اذا اخذت الواحد والاثنين والاربعة كان جميع ذلك سبعة وهي عدد اول فتضربها في الاربعة التي هي آخر الاعداد المتضاعفة فيكون ذلك ٢٨ وهي عدد تام لانه لا يعدها الا واحد ٢ ٤ ٧ ١٤ فجميع ذلك ٢٨ وليس يعدها غير ذلك ، وهذا هو العدد الثاني من الاعداد التامة . فان اخذت ٢ ٤ ٦ ٨ كان ذلك ٢٠ وليس ١٥ عددا اول لان ٣ تعدها و ٥ تعدها فليس يكون من ضربك اياها في ٨ عدد تام لأنه يكون من ضربك اياها في

٢٠ - وردت دون تنقيط : سمها .

٢١ - مشتركين .

٢٢ - نحو في المخطوط .

ثمانية ١٢٠ و ١٢٠ بعدها ١٢٠ ١٠ ١٢ ١٥ ٢٠ ٢٤ ٣٠ ٤٠ ٦٠ فجميع ذلك ٢٤٠ وهذا ضعف العدد . لكن اخذنا واحدا و ٢ و ٤ و ٨ و ١٦ كان ذلك ٣١ وهي عدد اول اذ كان لا بعدها الا الواحد فقط فاذا ضربت الواحد وثلاثين في ١٦ التي هي آخر الاعداد التي اخذت متضاعفة من الواحد كان ٤٩٦ وهي عدد تام لانه بعدها ١ ٢ ٤ ٦ ٨ ١٦ ٣١ ٦٢ ١٢٤ ٢٤٨ فالجميع ٤٩٦ . وكذلك ما اردت من الاعداد التامة .

### الباب الحادي عشر :

اذا اردت ان تجد الاعداد المتحابية والعددان اللذان يقال لهما متحابين هما عددان يكون جميع اجزاء كل واحد منهما اعني جميع الاعداد التي تعده مساوية للآخر . والطريق الى وجود هذه الاعداد المتحابية ان تأخذ الاعداد المتضاعفة |  
 ٨٧ ب من الواحد الى ما اخذت وتجمعها والواحد معها وتريد على ذلك العدد الآخر من الاعداد التي جمعت وتحفظ ذلك ثم تنقص مما جمعت اولاً ، العدد الذي يلي آخر الاعداد التي كنت جمعت قلبه \* ، وتحفظ ما هي فان كان كل واحد من العددين المحفوظين عدداً اولاً بعد ان لا يكون اثنين ضربت احدهما في الآخر ، فما احتتمع ضربته في العدد الذي هو آخر الاعداد التي كنت جمعت اولاً فما بلغ فهو احد العددين المتحابين . ثم تأخذ العدد الذي هو مثلاً ٣٣ العدد الآخر من الاعداد التي كنت جمعت ٢٤ فما بلغ فهو العدد الثاني من العددين المتحابين الذي بدأنا بذكر قرينه . فان لم تصح الشرائط على ما وصفت تجاوزت العدد الذي كنت انتهيت اليه عند الجمع واستعملت ما ذكرت ، فانك تجد ما تريد ان شاء الله . واذا اردت ان تجد عددين آخرين على هذه الصفة تجاوزت أيضاً ذلك العدد وفعلت مثل ما تقدم فانك تجد ما تريد ، وكذلك كم شئت من الاعداد .

مثال ذلك : اخذت ٢ ١ فكان ٧ وزدت على ذلك آخر الاعداد وهو ٤ فكان ٦١ وهي عدد اول ، ثم نقصت من السبعة العدد الذي [ يلي ] آخر الاعداد

• قبله عائدة الى ١ ، المراد ان ينقص من الجملة العدد الواقع قبل آخر الاعداد

٢٣ - مثلي .

٢٤ - مقطع في النسخ حلة طويلة معناها : والعدد الذي بينه وبين اخر الاعداد عدد واحد ، فنضرب ذلك جميعاً في العدد الذي هو مثلاً آخر الاعداد وتنقص مما اجتمع واحداً ، فان كان الباقي عدداً اولاً فنضربه في آخر الاعداد التي كنت جمعت " وسوف يتضح ذلك من المثال .

قبله وهو ٧ فبقي خمسة وهي عدد اول ، فضربت ١١ في ٥ فصار ٥٥ ثم ضربت ذلك في آخر الاعداد التي كنت جمعت وهو ٤ فكان ذلك ٢٢٠ وهو احد العددين المتحابين . ثم اخذت مثلي آخر الاعداد التي جمعت وهو ٤ وذلك ٨ والعدد الذي قبل آخر الاعداد وبينهما عدد واحد وذلك واحد . فيصير ٩ فتضرب ذلك في العدد الذي هو مثلاً ٢٠ اخر الاعداد وهو ٨ فيكون ٧٢ ، فتقص منه واحداً فيبقى ٧١ وهي عدد اول ، فتضربه في آخر الاعداد التي كنت جمعت وهو ٤ ، فيكون ذلك ٢٨٤ . وهو العدد الثاني من العددين المتحابين ، فاجزاء ٢٢٠ وهي الاعداد التي تعدده ٢٨٤ ٤ ٢٠ ١١ ٢٠ ٢٢ ٤٤ ٥٥ ١١٠ الجميع ٢٨٤ وليس بعدها غير هذه الاعداد وهي العدد الآخر من العددين المتحابين . واجزاء ٢٨٤ وهي الاعداد التي تعدده ٢٨٤ ٢ ١٤٢ ٧١ ٤٢٢ الجميع ٢٢٠ وليس بعدها غير هذه الاعداد . وكذلك كلما اردت استخراج الاعداد المتحابة .

٢٦ لي في هذا الوقت من هذا المعنى . واد قد وعدت ان اذكر في آخر هذه الرسالة اضعاف بيوت الشطرنج وجملة ٣٧ فلأت به . واذا كنا قد بلغنا في الباب الخامس من اضعاف بيوت الشطرنج الى ما في البيت التاسع وهو ٢٥٦ فاذا ضربت هذا في نفسه كان ما في البيت ١٧ وهو ٢٥٦٣٦ ، فاذا نقصت من هذا واحداً كان الباقي جميع ما في البيوت ١٦ ، واذا ضربت ذلك في نفسه كان ذلك ما في البيت ٣٣ وهو ٢٨٤٢٩٩٦٧٢٩٦ فاذا نقصت من هذا واحداً كان الباقي جميع ما في البيوت ٣٢ واذا ضربته في نفسه كان ذلك ضعف ما في البيت ٦٤ وهو ١٨٤٤٦٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٦ فاذا نقصت من جميع ذلك واحداً كان الباقي جميع ما في رقعة الشطرنج وبقيت ٣٠ من عظم هذا العدد ما انا ذاكره وذلك انه قد تبين في الرصد الذي رصده المأمون عما حكاه جماعة اصحابه وبينت كيفية

٢٥ - مثلي .

٢٦ - بقية خبر تعطي مكان كلتين او ثلاثة والمضى تقديراً : هذا ما نسخ . انظر في ترجمة القبيصي ، الرسالة ٨ ، متى مشأها لهذا .

٢٧ - الكلمة غير واضحة وكتابتها ملحة .

٢٨ - ٤٢٩٨٥٦٩٦ .

٢٩ - ١٨ ٢٦٥ ٥٤٤ ٨٢٩ ٧٢٨ ١٥١ ٦٦٦

٣٠ - وس

ذلك في رسالتي في مساحة<sup>٣٩</sup> الأرض أنهم وجدوا ما يوازي درجة من الفلك من مساحة الأرض ٥٦ ميلا وثلاثي ميل ، وقد تبين أن الأرض في وسط الفلك كالنقطة في الدائرة ، فيكون دور الأرض على هذا الحساب إذا كان يحيط بها ٣٦٠ درجة ٢٠٤٠٠. ولما كان المحيط مثل القطر ثلاث مرات وسبع على ما بينه ارشميدس يكون قطر الأرض ٦٤٩١ ميلا ، ولما كان قد تبين أيضاً من قول ارشميدس أن ضرب قطر الكرة في محيط اعظم دائرة تقع عليها هو مساحة جميع ظاهرها يكون مساحة جميع ظاهرها على هذا الحساب ١٣٢٤١٦٤٠٠ ميلا مكسرة ولما كان الميل المكسر أربعة الاف ذراع في أربعة الاف ذراع يكون الميل ستة عشر الف ذراع فيكون مساحة جميع ظاهرها ، برها وبحرها وسهنها وجبلها وعامرها وغامرها ٢١١٨٦٦٢٤٠٠٠٠٠٠٠٠ ذراعا . وإذا كان قوس\* ذراع في ذراع من الورق الوضع مما امتحنته ٥٠٠ درهم يكون جميع قوس الأرض | برها وبحرها وسهلهما وجبلها من الورق ١٠٥٩٣٣١٢٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ درهم ، فيكون اضعاف بيوت الشطرنج مثل هذه الحملة سبع عشرة مرة وخمسين<sup>٣٢</sup> مرة بالتقريب . وهذا اضعاف بيوت الشطرنج الذي في الباب الخامس وهو الاصغر ، فاما الذي في الباب السادس فانه اضعاف هذا المقدار مرارا كثيرة ولعل قائل يقول كيف يحصل بسيط ظاهر الأرض مع ما فيه من الجبال الشاهقة والودية القعرة فنقول في جواب ذلك :

١٨٨

## ٣٩ - حافة

\* قوس الشيء مقداره وقياسه من قاس يقوس وهو أقل شيوعاً من قاس يقيس قياساً . جاء في لسان العرب لابن منظور طلبة بيروت ، مجلد ٦ ، ١٩٥٦ ، ص ١٨٦ . ولعل المدينة يقولون لا يجوز هذا في القوس يرينون القياس .

معنى العبارة فيما نفهمه ان القيسي اخذ صفيحة من الفضة الخالصة ، ذراعاً في ذراع فوزنها ٥٠ درهم ، إلا انه لم يبين سمكها . فلذا قدرنا الذراع الموداء التي اعتبرها ٥٤,٠٤ سم والدرهم ٣,١٤ غرام وثقل سم من الفضة ١٠,٥ غرام ، يكون سمك الصفيحة نصف ملم تقريباً وهو سمك معقول وإلى مثل هذا ينحى الخلاف في كتابه ميزان الحكمة ، ٥١٥ هـ ، عندما يسأل عن دراهم تصاعيف الشطرنج ما مقدار سمكها إذا بسطت على وجه الأرض . ومسألة بسيط الأرض بالأميال المكسرة والدرعاف في كتابه توافق تماماً ما جاء في رسالة القيسي ( عبد الرحمن الخازني ، ميزان الحكمة ، حيدر آباد ، ١٣٥٩ هـ ، ص ٧٦ ) في الطلبة ، السند الثاني ينقصه صفحاً ( ولعل في نشر الفضة بهذا الشكل على بسيط الأرض ذكرى للآية الكريمة : ( إن الذين كفروا وماتوا وهم كفار فلن يقبل من أحدكم ماء الأرض ذهباً لو افترض به أولئك لهم عذاب أليم وما لهم من فاسرين ) وقد استشهد الخازني بهذه الآية . ( ص ٧٣ من ميزان الحكمة )

٣٢ - وخمسين ؟

انا نستعظم ذلك بالقياس اليها لا الى جملة الارض ، اذ كان ما يدرك جملة وان عظم في حواسنا كالجزة الذي لا يتجزأ اذا قسناه الى جملة الارض . فانه ذكر من عني بالبحث عن ذلك انه لم يجد فيما ذكر من جملة هذا الربع المسكون جبلا اعلى<sup>٣٣</sup> من جبل سرنديب وانه اخذ عموده الى مسقط حجره ، ونحن نذكر كيف يوجد ذلك وهو معرفة ارتفاع ما لا يوصل الى اسفله بعد كلامنا هذا ، يعرف مقداره وقد عرف مقدار قطر الارض بالطريقة الذي ذكرنا ، ثم اخذ كرة فجعل عليها شخصا جعل مقدار ارتفاعه على الكرة من قطرها كمقدار ارتفاع جبل سرنديب الى قطر الارض ، فكان ذلك على ظهر الارض كالخشونة<sup>٣٤</sup> لا يحس صغراً . وكذلك جميع الجبال والادوية اذا قسناها الى جملة الارض كانت لا تحس وكانت الارض كأنها بسيطة الظهور .

فاما معرفة ارتفاع شيء ما عن وجه الارض اذا لم نصل الى اسفله فهو معرفة اعمدة الجبال . اذا اردت ذلك فعند ارتفاع رأس الجبل في ارض مستوية بقياس الاسطرلاب كما تأخذ ارتفاع الكوكب . ثم تأخر عن ذلك الموضع بمقدار ما يتغير الارتفاع درجا ما ، ثم اخذ ارتفاعه في ذلك الموضع الثاني ثانية ، واجعل الارتفاع الاول جيبا وهو الجيب الاول ، ثم انقص الارتفاع من ص\* واجعل الباقي جيبا وهو الجيب الثاني وكذلك فافعل بالارتفاع الثاني فيخرج لك الجيب الثالث والجيب الرابع . ثم تضرب الجيب الثاني في الجيب الثالث وتقسمه على الجيب الاول فما خرج نقصته من الجيب الرابع وتحفظ ما بقي . ثم تضرب ما بين الموضعين اللذين اخذت منهما الارتفاع من الاذرع في الجيب الثالث وتقسم على ما كنت حفظته فما خرج فهو عمود الجبل وارتفاع الشيء المطلوب ارتفاعه .

٣٣ - اعلا .

٣٤ - كالخونة .

\* ص أي ٩٠ درجة = جيب اول = جيب ج .

جيب ثان = جيب ( ٩٠ - ج )

جيب ثلث = جيب د

جيب رابع = جيب ( ٩٠ - د )

ويلاحظ عدم استعمال لفظة جيب التمام



فاذا اردت ان تعلم كم بين الموضع الذي اخذت فيه الارتفاع الاول ومسقط  
عمود الجبل من مستوى الارض ، فاضرب ما خرج من القسم قبل ان تسقطه من  
الجيب الرابع فيما بين الموضعين من الاذرع ، وتقسمه ايضاً على ما حفظته من الباقي .  
فما خرج فهو ما بين الموضع الاول الذي اخذت فيه الارتفاع ومسقط عمود  
الجبل من مستوى الارض . فان اردت ان تعلم كم بين ناظرك في الموضع الذي اخذت  
فيه الارتفاع الاول وبين رأس الجبل فاضرب ما بين الموضع ومسقط عمود الجبل  
في نفسه ، واضرب عمود الجبل في نفسه ، واجمعهما ، ثم خذ جذر ذلك . فهو  
ما بين ناظرك ورأس الجبل وذلك ما اردنا علمه .

$$\overline{اب} = \overline{ج د} \times جيب \hat{د} : [ جيب (\hat{ج} - 90) \times جيب \hat{د} ] \quad (1)$$

ولعل الطريق التي اتبعها القبيصي للوصول إلى القاعدة (1) هي ما يلي :

برسم ج د عموداً على ا د ، فليكن ا ب د ج هـ د متساويان . ينتج عنه :

$$\frac{\overline{ج د}}{\overline{ا د}} = \frac{\overline{ب د} - \overline{ب ج}}{\overline{ا د}} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{ب د}}{\overline{ا د}} = \frac{\overline{ج د}}{\overline{ا ب}} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{ب د}}{\overline{ا د}} = \frac{\overline{ب ج}}{\overline{ا ب}} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{ب د}}{\overline{ا د}} = \frac{\overline{ب ج}}{\overline{ا ب}}$$

$$\text{ولكن } ج د = ح د \times جيب \hat{د}$$

$$\text{يكون } \overline{ج د} \times جيب \hat{د} = جيب (\hat{ج} - 90) \times جيب \hat{د} \times جيب \hat{د}$$

$$\text{ينتج منه القاعدة (1) : } \overline{اب} = ج د \times جيب \hat{د} : [ جيب (\hat{ج} - 90) \times جيب \hat{د} ]$$

$$\text{حساب } \overline{ب ج} : \text{يقول القبيصي : } \overline{ب ج} = \overline{ج د} \times جيب (\hat{ج} - 90) \times جيب \hat{د} : [ جيب (\hat{ج} - 90) \times جيب \hat{د} ]$$

$$[ \text{وينتج حساب } \overline{ب ج} \text{ من ضرب } \overline{اب} \text{ في جيب } \frac{(\hat{ج} - 90)}{جيب \hat{ج}} ]$$

تمت رسالة أبي صقر عبد العزيز بن عثمان القييصي في انواع من الاعداد وطرائف  
من الاعمال مما جمعه من متقدمي اهل العلم بهذه الصناعة والحمد لله رب العالمين والصلوة  
على رسوله محمد وآله اجمعين

## البرق الخبيث

- Brockelmann:** C. Brockelmann, *Geschichte der Arabischen Literatur*, 1. Supplement (Leiden: Brill, 1937), p. 399.
- Canard :** M. Canard, *Histoire de la dynastie des Hamdanides de Jazira et de Syrie*, tome I (Alger, 1951).
- Duhem:** P. Duhem, *Le système du monde*. a) tome II (Paris, 1914), p. 53; b) tome III (Paris, 1958), pp. 177-183, 214; c) tome IV (Paris, 1964), pp. 86-87, 221.
- Mieli:** Aldo Mieli, *La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondiale* (Leiden, 1966), pp. 110, 114.
- Krause:** Max Krause, "Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik und Physik*, Abteilung B, Studienband 3 (1936), 437-532.
- Sarton I:** G. Sarton, *Introduction to the History of Science* (Baltimore, 1953), volume II, part I, pp. 169-172.
- Sarton II:** *Ibid.*, volume I, p. 669.
- Sauvaget:** J. Sauvaget, *Alep. Essai sur le développement d'une grande ville syrienne, des origines au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle* (Paris, 1941).
- Suter I:** Heinrich Suter, "Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke", *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, 10 (1900), Nr. 132.
- Suter II:** Heinrich Suter, "Nachtrage und Berichtigungen zu 'Die Mathematiker ...'", *ibid.*, 14 (1902), Nr. 132, pp. 165-166.
- Suter III:** Heinrich Suter, "al-Kabiši". *Encyclopédie de l'Islam* (Leiden, 1927).



$$\text{Et } BC = CD \cdot \frac{\sin(90^\circ - \widehat{D}) \sin \widehat{D}}{\sin C} : \left[ \sin(90^\circ - \widehat{D}) - \frac{\sin(90^\circ - C) \times \sin D}{\sin C} \right] \quad (2)$$

### Observation

Al-Qabîsî énonce les formules (1) et (2) sans démonstration. La structure de (1) rend possible la démarche suivante (voir fig. 1) : Abaisser  $CH$  perpendiculaire à  $AD$ . Les triangles  $CHD$  et  $ABD$  sont semblables.

$$\frac{CH}{AB} = \frac{CD}{AD} \text{ comme } CD = BD \text{ } BC, \text{ on a } \frac{CH}{AB} = \frac{BD}{AD} - \frac{BC}{AD} = \frac{BD}{AD} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AD}$$

$$\text{Mais } CH = CD \sin D. \text{ D'où } \frac{CD \sin D}{AB} = \sin(90^\circ - D) - \frac{\sin(90^\circ - C)}{\sin C} \cdot \sin D$$

$$\text{On en tire } AB = CD \sin D : \left[ \sin(90^\circ - D) - \frac{\sin(90^\circ - C) \cdot \sin D}{\sin C} \right] \quad (1)$$

$$\text{On obtient } BC \text{ en multipliant } AB \text{ par } \frac{\sin(90^\circ - C)}{\sin C}$$

10) Trouver un nombre parfait, c'est-à-dire égal à la somme de ses diviseurs.

Si  $(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)$  est premier alors  $2^n (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)$  est un nombre parfait. Exemple  $(1 + 2) 2 = 6$ ;  $(1 + 2 + 2^2) 2^2 = 28$ ;  $(1 + 2 + \dots + 2^4) 2^4 = 496$ .

11) Nombres amiables, c'est-à-dire, deux nombres tels que chacun égal à la somme des diviseurs de l'autre. Des formes

$$A = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n), B = A + 2^n, C = A - 2^{n-1}$$

Si  $B$  et  $C$  sont premiers, différents de 2, un des nombres amiables est  $2^n BC$ . Le 2ème égal à  $[2^{n+1} (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1] 2^n$

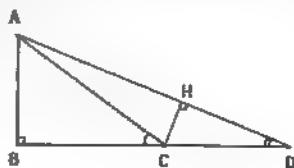
*Somme des nombres contenus dans les cases d'un échiquier*

Al-Qabisi en fait le calcul effectif 18.446.744.073.709.551.615. Pour faire comprendre l'énormité de ce résultat, il recourt à une comparaison classique. 1° du méridien terrestre vaut  $56\frac{1}{2}$  milles, d'après les observations astronomiques ordonnées par le calife al-Ma'mûn (renvoi au livre de l'auteur: *Misâhat al-Ard*, Mesure de la terre; dans le ms. *misâfat*). La circonférence de la Terre est donc 20400 milles; le diamètre est donc 6491, car Archimède a montré que  $\pi = 3\frac{1}{7}$  (!). La surface de la terre d'après la règle trouvée par Archimède est 134.416.400 milles carrés, ou en coudées carrées  $134.416.400 \times (400)^2 = 2.118.662.400.000.000$ . L'auteur ajoute que, d'après ses expériences, une feuille d'argent d'une coudée carrée pèse 500 dirhems. Par suite, en couvrant la Terre avec une feuille d'argent de la même épaisseur, le poids de la feuille sera 1.059.331.200.000.000.000 dirhems. Le nombre trouvé dans l'échiquier est  $17\frac{2}{3}$  fois ce nombre.

A qui demande si l'on peut assimiler la Terre avec ses vallées et ses montagnes, ses continents et ses mers, à une sphère, l'auteur répond que si l'on représente la Terre par un globe, la plus haute montagne n'y serait qu'une rugosité, à peine sensible. Mais comment peut-on mesurer la hauteur d'une montagne, dira-t-on? Voici une règle pour cela.

Soit  $A$  le sommet d'une montagne (voir fig. 1),  $AB$  sa hauteur. De deux points  $C$  et  $D$  dont on mesurera la distance  $CD$ , on calculera les angles  $\widehat{ACB}$ ,  $\widehat{ADC}$  grâce à un astrolabe.

Alors  $AB = CD \cdot \sin \widehat{D} : \left[ \sin (90^\circ - \widehat{D}) - \frac{\sin (90^\circ - \widehat{C}) \times \sin \widehat{D}}{\sin \widehat{C}} \right]$  (1)



$$2) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \left[ \frac{(2n-1) + 1}{2} \right]^2. \text{ Exemple: } 1 + 3 + \dots + 9 = \left( \frac{9+1}{2} \right)^2 = 25$$

$$3) \quad 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \frac{2n}{2} (n+1). \text{ Exemple: } 2 + 4 + \dots + 12 = \frac{12}{2} (6+1) = 42$$

$$4) \quad 1.2 + 2.3 + \dots + (n-1).n. \text{ Parmi les trois nombres } n, n+1, n-1 \text{ il y en a un divisible par 3. Multiplier son tiers par des deux autres pour avoir la somme. Soit } \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Exemple:  $1.2 + 2.3 + \dots + 9.10$ . La somme est  $\frac{9}{3} 10.11 = 330$

5) *Problème du jeu d'échecs.* On pose 2 sur la 1ère case du jeu d'échecs, 2 sur la 2ème, et ainsi de suite en doublant toujours. Quel est le total des nombres posés? Si la case de rang  $k$  contient  $2^{k-1}$ , alors la case de rang  $2k-1$  contient  $(2^{k-1})^2$ . Calculer alors  $2^2$  (3ème case),  $2^4$  (5ème case),  $2^8$  (9ème case),  $2^{16}$  (17ème case),  $2^{32}$  (33ème case),  $2^{64}$  (65ème case). Le contenu d'une case diminué de 1 donne la somme des nombres précédents. Le calcul de  $2^{64}-1$  sera fait ultérieurement.

6) *Autre façon de remplir les cases.* Mettre 1 dans la 1ère case, 2 dans la 2ème, 6 dans la 3ème, 18 dans la 4ème, et ainsi dans chaque case, le double de ce qu'il y a dans toutes les précédentes. Si  $u_n$  est le contenu du  $n$ ème casier, alors  $u_n = \frac{3}{2} u_{n-1}^2 - 1$ .

$$7) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$8) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 \left[ \text{Soit, d'après (1)} \left( \frac{n^2+n}{2} \right)^2 \right]$$

$$9) \quad 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \left( n^2 + \frac{n}{2} \right) (n+1) \left[ n \left( \frac{n}{5} + \frac{1}{5} \right) - \frac{2}{30} \right]$$

L'auteur fait remarquer que le produit des deux premiers facteurs est un entier.

Ces trois règles sont illustrées respectivement par les sommations:

$$1^2 + 2^2 + \dots + 5^2; 1^3 + 2^3 + \dots + 10^3; 1^4 + 2^4 + \dots + 6^4$$

naturels.<sup>3</sup> La proposition 11 sur la formation des nombres amiables appartient à Thābit b. Qurra (211-288 H.).<sup>4</sup>

Les règles ne sont pas démontrées mais illustrées par des exemples. Quelques décades plus tard, vers 402 h. al-Karajī insère dans son al-Fakhrī, la sommation :

$1.2 + 2.3 + \dots + (n-1) n$ , proposition 4 d'al-Qabiṣī<sup>5</sup> et il ajoute avec leurs démonstrations :

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n-1) .n .(n+1) = \left( \sum_1^n i \right)^2 - \sum_1^n i$$

$$1.3 + 3.5 + \dots + (2n-3) .(2n-1) + 2.4 + 4.6 + \dots + (2n-2) .2n^6$$

Nous ne savons quel accueil l'émir Sayf al-Dawla réserva à ce mémoire. En des circonstances analogues, le prince bouyide 'Aḍud al-Dawla (324-372 h.), autre grand promoteur des lettres et des sciences, fit la moue quand son maître le grammairien et linguiste al-Fārisī lui dédia son livre al-*Iḍāḥ* (L'explication). L'ayant parcouru, 'Aḍud al-Dawla dit à l'auteur : "Il n'y a rien là-dedans que nous ne connaissions déjà. C'est bon pour des écoliers!" Sayf al-Dawla eût pu aussi demander à al-Qabiṣī plus de résultats nouveaux.

### Propositions

1)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}$ . Exemple :  $1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10^2 + 10}{2} = 55$

2. Calcul de  $\sum_{x=1}^n x^2$ , chez Archimède. *Traité des spirales* voir Paul Ver Eecke, *Les œuvres complètes d'Archimède* (Paris, 1960), tome 1, pp. 253-255. Calcul de  $\sum_{x=1}^n x^2$ , dans la tablette babylonienne AO 6484 (Van der Waerden, *ibid*)  $\sum_{x=1}^n x^2$  étaient comme des Romains est donc, selon toute possibilité, des Grecs. (Gino Loria, *op. cit.*, p. 137).

4. Thābit b. Qurra, *Istikhrāj al-'adād al-musahāba*, Paris ms 2457, 38, fol. 170b-180b; analysé par F. Woepcke, Notice sur une théorie ajoutée par Thābit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs, *Journal Asiatiques* 20ème série, tome 4 (1853), 420-429. Pour les nombres amiables chez Pythagore, voir T.L. Heath, *A manual of Greek Mathematics* (Oxford, 1931), p. 42.

5. Al-Fakhrī, Le Caire ms V, 212, fol. 15b, l. 11.

6. *Ibid*, fol. 17a, l. 1; fol. 16b, l. 4.

7. Al-Fārisī composera alors al-Takmilā et 'Aḍud al-Dawla de dire "Le maître s'est fâché! Ni lui ni nous ne comprenons plus rien de ce qu'il a écrit... Yāqūt al-Ḥamawī, *Mu'jam al-wadā'*, (éd. Le Caire, 1936-), tome 7, p. 228.

# Un mémoire d'al-Qabīṣī (4e siècle H.) sur certaines sommations numériques.

ADEL ANBOUBA\*

## Introduction

L'auteur loue dans son mémoire Sayf al-Dawla (émir d'Alep de 333 à 356 h.) pour l'intérêt qu'il porte aux lettres et aux sciences. Et évoquant la grande habilité de l'émir dans le calcul digital, il ajoute qu'il a réuni, pour le servir, des propositions intéressantes relatives à la sommation des nombres, qu'il a trouvées éparpillées dans des écrits divers ou qu'il a découvertes lui-même.

Il est possible, en effet, que lui appartiennent :

- 1) La sommation des quatrième<sup>s</sup> puissances des entiers naturels, ce qui représenterait un résultat important. (Prop. 9).
- 2) Le calcul d'une suite récurrentielle, extension du problème du jeu d'échecs, savoir (Prop. 9):

$$\text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, \text{ et } u_n = 2 \sum_{i=1}^{n-1} u_i, \text{ alors } u_n = \frac{3}{2} u_{n-1}^2$$

- 3) Une formule trigonométrique donnant la hauteur d'une montagne. (Fin de mémoire).

En tout cas, nous ne connaissons pas de mémoire antérieur qui contienne les propositions 6 et 9.

Sont très anciennes, comme on le sait, les propositions 1, 2, 3 sur les progressions arithmétiques;<sup>1</sup> la proposition 5 sur la progression géométrique 1, 2, 4, ...;<sup>2</sup> la proposition 10 sur la formation des nombres parfaits (Euclide, IX, 36); les propositions 7 et 8 sur la somme des carrés et des cubes des entiers

\*Institut Moderne du Liban, Fanar-Jdaïdet, Beyrouth, Liban.

1. B. L. Van der Waerden, *Science Awakening*, 3ème éd., Groningen, p.77, 99. Gino Loria, *Histoire des Sciences Mathématiques hellènes* (Paris, 1929), p.132.

2. Van der Waerden, *ibid.* D'autre part on trouve le calcul de  $\sum_{i=1}^{63} 2^i$  dans l'œuvre d'al-Khawārizmī (cité par Shujā' b. Aalam, *Kitāb al-Jabr wa'l-muqābala*, Qara Mustafa Ma 379, fo. 116°).

# ملخصات الفلك الهندى المنسورة فى القسطنطينية

الفلك الهندى فى القرن الرابع عشر فى مدينة فاس  
« زيج شعري للقسطنطيني »

١. س . كندى وديفيد كينج

اسمه ابو الحسن علي بن أبي علي « القسطنطيني » وهو فقيه وموقت ، الف زيجاً صغيراً وجمعه على شكل كتيب فلكي يتضمن شرحاً وجداول واهداه الى السلطان المريني ابراهيم المستعين وقد اتى شرح هذا الزيج بشكل شعري ولكن مهما يكن فالسبب الرئيسي لهذه الدراسة هو ان هذا هو العمل الفلكي الوحيد المعروف باللغة العربية والمتضمن لنظرية الكواكب السيارة والتي هي بجوهرها هندية وليست بطليموسية وان ريج الخوارزمي مبني ايضاً على النظرية الهندية ولكن لم يبق لنا منه سوى الترجمة اللاتينية للنسخة المعدلة من قبل المجريطي .

ونقدم هنا صسورة طبق الاصل في هذه المجلة وعلى الصفحات (41 - 22) للنسخة الوحيدة لزيج القسطنطيني وهي نسخة الاسكوريال ورقمها ٩٠٩ عربي ( Ms arab 909 ) .

المجموعة الاولى من الجداول هي التقاويم ويمكن استخدامها للتحويل بين التاريخ الهجري والتاريخ الرومي ( السلوي ) وحركات الاوساط الاساسية للكواكب السيارة وجداولها التي لم تظهر في الزيج يمكن حسابها من الاعداد المعطاة في النص . وان حركات الاوساط هذه هي من المغرب العربي وليست من الهند . ولها علاقة بجداول ابن البنا وبالجداول الطليطية .

ان جداول تعديل مسارات الشمس والقمر والسيارات هي نفس جداول الخوارزمي الا انها تحول القوس الى دقائق فقط في حين ان جداول الخوارزمي تحولها في بعض الاحيان الى ثوان و نرى ايضاً جداول مقامات الكواكب السيارة ومطالع البروج في تلك المستقيم ومطالع الروح للبلد ورؤية الهلال والكسوفات والخسوفات .

وما يلفت النظر ايضاً اننا لانجد في زيج القسطنطيني الجداول التالية :

التوانع المثلية وعروض الكواكب السيارة واحداثيات النجوم الثابتة والبلدان وتوانع علم النجوم مع ان معظم الارياح تحويها .

ومع ان اساس الرسالة هو في انشاء « الانحراف » لتقسيم الزاوية الى ثلاثة اقسام متساوية فانه مفهوم ضمناً في عمل السجزي [ ٩ ، ص ١٢٠ ] انه يجب عدم استعمال انشاء كهذا ويبدو ان هذا الرأي ليس رأي المؤلف وبالتالي قد يكون انه ليس المؤلف .

وبرى ايضاً ان الباحثين اللذين عرفا في ذلك الوقت بكتابتهما حول « المتسع » كإبي الخود والبيروني لم يستعملا انشاء الانحراف . لقد استعمل ابو الجود الاشكال المخروطية وكان اكثر اهتماماً بالطرق الجبرية في حين ان البيروني مثل الانشاء على انه قليل الاستعمال في الاعداد .

### والخلاصة

ان هذه الرسالة هي عمل مؤلف عالم هندي مجهول من القرن العاشر وهناك شامد آخر أبعد هو تأليف وصيلة بني موسى على الرياضيات العربية في العصر الوسيط .

## رسالة نصر بن عبد الله في استخراج سمت القبلة

روثارد لورث

ألف نصر بن عبد الله الملقب بالعريزي - استناداً إلى سزكين ( ج ٥ ، ص ٣١٤ ؛ ج ٦ ، ص ٢٠٨ ) - مقالات في الكسوف والخسوف ورسالة في أن الأشكال كلها من الدائرة . أما بشأن عصره فالشاهد الوحيد يظهر في مقطع ورد في بداية رسالته الأخيرة يقول فيه إنه قد أنجز كتاباً تحفة الملك المنصور . بيد أن مصنف المخطوط يعتبر وبثقة تامة أن الملك المنصور هو نفس السلطان منصور عضد الدولة . وبذلك يحدّد عصر نصر بن عبد الله في النصف الثاني من القرن الرابع الهجري/العاشر الميلادي .

إن الآلة التي يصفها الكاتب هنا هي إحدى الآلات المحدودة العدد التي يمكن بها استخراج سمت القبلة هندسياً . إذ تستخرج وجهة القبلة بآلات أخرى مثل الربع المهيّب تتبع حسابات مثلثاتية ، وتوجد آلات كثيرة يمكن من خلالها حساب القبلة منها دائرة المعدل حيث المحاريب في داخل دائرة الأفق . وتتلخص طريقة نصر بن عبد الله في رسم بياني أساسي بطوي أقواس الدوائر العظمى مباشرة على نصف الكرة . نوضع نصف الكرة  $AGBD$  تنصفها كلتا الدائرتين المتعامدتين  $AEB$  و  $DEG$  بشكل تتجه معه  $B$  نحو الشمال . إذا كانت  $\varphi$  تمثل خط عرض المكان المطلوب و  $\Delta L$  فضل الطول بين المكان ومكة و  $\varphi_m$  عرض مكة ، فالشكل (١) يمثل باختصار المراحل المتبقية من العملية .

$$BZ = \varphi \quad \text{حيث } Z \text{ هي القطب الشمالي}$$

نرسم خط الاستواء  $GHD$  بالاتجاه العاكس للقطب  $Z$

$$HT = \Delta L$$

نرسم  $LZTK$

$$TM = \varphi_m$$

حيث  $M$  هي موضع مكة

نرسم  $EMN$  حيث  $DN$  هي سمت مكة



لإنشاء هذا التركيب على نصف كرة ، على المرء أن يستعمل أداتين لرسم الدوائر العظمى : الفرجار لرسم الدائرة إذا عرفت نقطة القطب ، والمسطرة لمطابقة والملاءمة ، إذا كانت نقطتان من الدائرة معلومتين . هذا ويجب أن تكون المسطرة مدرجة لتأشير على العرض وعلى فصل الطول . لم ينوه إلى طيعة هاتين الأداتين ، لكن جاء وصف الفرجار لماسب في كتب المعرفة "Libros del Saber" القرن الثالث عشر ، ووصف المراكشي مسطرة مناسبة تستعمل في آلة « ذات الكرسي » . ووردت نفس الطريقة من حيث جوهرها عند عبد الرحمن الخازني في التطبيق الخامس عشر في « الكرة التي تدور بذاتها » . في هذه الحالة حيث تم تأشير القطب ودائرة الاستواء ، تبقى العلامة الإضافية الوحيدة في الكرة هي نقطة موضع مكة ؛ وتستخدم المسطرة لواصل بين هذه النقطة وسمت المكان لإيجاد سمت مكة على دائرة الأفق . مما أن الكرة استعملت هنا فقط كما استعملت « في ذات الكرسي » فإن أحياناً لاحقة يمكنها إبراز هذه الطريقة في تحديد وجهة القصة من خلال رسائل أخرى عن هذه الآلة . ومن بين استعمالات الأسطرلاب الكروي المزود بنظام إحداثي أفقي استخراج سمت مكان ما نسبة إلى مكان آخر . أما الطريقة المرددة باستعمال المواثر المسقطة فقد أوجدت القلة بواسطة ربع المقنطرات . ومن المدهش أن الرقائبي لم يكتشف آله « دائرة المعدل » لهذه الغاية فهي تحتاج إلى أن تدرج فيها نصف دائرة الرؤية الدوارة ، وإلى مربع آخر ينتصف عمودياً على دائرة الأفق .

يقول نصر بن عبد الله إنه كان قد كتب سابقاً في هذا المجال كثيراً يبدو أنه ضاع وهو حول « تركيب الأفلاك » يحتمل أن تكون له علاقة بكتب الفلك التي هي من مدرسة « قرظيات » بطليموس .

**اعادة ترتيب**  
**مخطوط عربي في الرياضيات والفلك**  
**بانكيبور ٢٤٦٨**

**جان بيتر هوخندايلك**

يضم المخطوط العربي بانكيبور ٢٤٦٨ في المكتبة الشرقية العمومية في دنته ( الهند ) مجموعة نفيسة تزيد على ٤٠ رسالة في الرياضيات والفلك الاسلاميين كتبت في القرن السابع للهجرة . أعيد تجليد المخطوط في الماضي فاختفي من جراء ذلك العديد من اوراقه كما ضاع واختل ترتيبه اجزائه .

ثم قامت عملياً دائرة المعارف العثمانية في حيدر آباد بطبع كامل المخطوط متبعة الغلط نفسه في ترتيب اوراقه مما أدى الى اضطراب النص المطبوع في اثنتين من رسائل البيروني : استخراج الأوتار ، افراد المقال في أمر الظلال ، وفي رسالتين لآبن سنان : الهندسة وعلم النجوم ، كتاب في حركات الشمس . في المخطوط كما في النص المطبوع توجد قطع من ثلاثة أعمال أخرى غاية في الأهمية في تاريخ الرياضيات والفلك الاسلاميين لم يعرف لها نسخ أخرى قط ، وهي :

١- مقالة في التحليل والتقطيع في التعديل . للبيروني

٢- المسائل المختارة . لابراهيم بن سنان

٣- مقالة في أن لوازيم تجزئ المقادير الى لانهاية قرية من امر الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان في الاستبعاد . للبيروني .

وفي عام ١٩٦٠ قدم احمد سعيدان وصفاً للنص المطبوع محاولاً مبدئياً تحقيق القطعتين ١ و ٢ دونما رجوع الى المخطوط . أما القطعة الثالثة فقد حققها في عام ١٩٧٧ بولجاكوف وأحمدوف .

يصف البحث المخطوط وصفاً مفصلاً. والمخطوط عبارة عن خمسة أجزاء متتابعة ، تمت الإشارة إليها في الفصل الثاني من البحث . أما فهرس المحتويات فقد أدرج في الفصل الثالث بالترقيم الحالي للمخطوط . وبترقيم معدل رآه كاتب البحث أقرب إلى الأصل — أو ربما كان كذلك — معتمداً في ترقيمه المعدل هذا فهرس سزكين « تاريخ التراث العربي » ، والنصوص المطبوعة في دائرة المعارف العثمانية والدراسات المعاصرة الوثيقة الصلة بالموضوع . في الفصل الرابع تحقيق دقيق ومحكم للقطعة الأولى استناداً إلى أعمال أخرى لليبروني . وفي الخامس تحقيق القطعة الثانية استناداً إلى مقطع من مؤلف للعالم الهندسي أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي ( القرن الرابع الهجري ) . أما الفصل السادس ففيه مناقشة مقتضبة حول القطعة الثالثة .

## ملاحظات لمن يرغب الكتابة في المجلة

١ تقديم نسختين من كل بحث أو مقال إلى معهد التراث العلمي العربي . طبع النص على الآلة الكاتبة مع ترك فراغ مزدوج بين الأسطر وهوامش كبيرة لأنه يمكن أن تجرى بعض التصحيحات على النص ، ومن أجل توجيه تعليمات إلى عمال المطبعة . والرجاء ارسال ملخص يتراوح بين ٣٠٠ - ٧٠٠ كلمة باللغة الانكليزية إذا كان ذلك ممكناً وإلا باللغة العربية .

٢ طبع الحواشي المتعلقة بتصنيف المؤلفات بشكل منفصل وتبعاً للأرقام المشار إليها في النص . مع ترك فراغ مزدوج أيضاً ، وكتابة الحاشية بالتفصيل ودون أدنى اختصار .

أ - بالنسبة للكتب يجب أن تحتوي الحاشية على اسم المؤلف والعنوان الكامل للكتاب والناشر والمكان والتاريخ ورقم الجزء وأرقام الصفحات التي تم الاقتباس منها .

ب- أما بالنسبة للمجلات فيجب ذكر اسم المؤلف وعنوان المقالة بين أقواس صغيرة واسم المجلة ورقم المجلد والسنة والصفحات المقتبس منها .

ج - أما إذا أشير إلى الكتاب أو المجلة مرة ثانية بعد الاقتباس الأول فيجب ذكر اسم المؤلف واختصار لعنوان الكتاب أو عنوان المقالة بالإضافة إلى أرقام الصفحات .

أمثلة :

أ - المظهر بن طاهر المقدسي ، كتاب البدء والتاريخ ، نشر كلمان هوار . باريس ١٩٠٣ ، ج ٣ ، ص ١١ .

ب- عادل انبوا ، قضية هلسية ومهندسون في القرن الرابع الهجري ، تسع الدائرة ، مجلة تاريخ العلوم العربية . مجلد ١ ، ١٩٧٧ ص ٧٣

ج- المقدسي ، كتاب البدء والتاريخ ، ص ١١١ .  
انبوا ، « قضية هلسية » ، ص ٧٤ .

## المشاركون في هذا العدد

عادل أنبوبا : يعمل في ميدان تدريس الجبر والحسنة ، وقد درس مادة تاريخ العلوم العربية في الجامعة اللبنانية وفي الكلية الفرنسية لمقتصد في بيروت .

ج. ل. يوغون : أستاذ الرياضيات في جامعة سيمون فريزر في كولومبيا البريطانية / كندا . له كتب تحت الطبع ( أحداث في تاريخ الرياضيات العربية في العصر الوسيط ) ( بالانكليزية ) .

وشمي راشد : مدير أبحاث في المركز الوطني للبحث العلمي - معهد تاريخ العلوم - جامعة باريس . نظم مشوراته العديدة في تاريخ الجبر والحسنة تحقيقاً ودراسة نقدية لجبر الخيام .

لوقس ريشتر - يودبورغ : مساعد في حلقة الدراسات العربية في جامعة جوتنجن . اهتمامه منصب على تاريخ الطب وخاصة وعلى تاريخ الحضارة العربية الإسلامية في العصر الوسيط بعامة

جورج صليبيا : أستاذ مساعد في الدراسات العربية الإسلامية في قسم الشرق الأوسط في جامعة كولومبيا . يركز اهتمامه حول العلوم الدقيقة الإسلامية في العصر الوسيط . يقوم حالياً بتحقيق أعمال المتكلمين الدمشقيين مؤيد الدين الرضوي وابن الأشاطر .

أورسولا فايسر : حققت كتاب التلألؤ و سر الخليفة وحسنة الطليعة ، لبلبوس الحكيم ، شره لها معهد التراث العلمي العربي . تعمل حالياً في حقول تدريس الطب وعلم الأحياء عند العرب .

ميرسيه فيلادريش : تنابع اهتمامها في ترجمة الأعمال الفلكية العربية إلى اللغتين اللاتينية والإسبانية في جامعة برشلونه .

أ. س. كندي : أستاذ متقاعد في الجامعة الأميركية في بيروت له عدة مؤلفات ومقالات في العلك والرياضيات الإسلامية .

ديفيد كينج : أستاذ مشارك في مادتي اللغة العربية وتاريخ العلوم بجامعة نيويورك . مؤلفاته في علم الصلك العربي - الإسلامي حديثة .

ريتشارد لورنشر : عمل عامين في معهد التراث العلمي العربي ، يعمل حالياً في لجنة كيلر التابعة لأكاديمية العلوم / باير ( في ميونيخ ) .

جان بيتر هوخندليك : نال درجة الدكتوراه في تاريخ الرياضيات من جامعة أوترخت / هولندا تضمنت أطروحته دراسة حول إحياء ابن الهيثم لكتب إيلونينوس في القطر .

## NOTES ON CONTRIBUTORS

**Adel Anbauba** works on the history of algebra and geometry. He has taught the history of Arabic Science at the Lebanese University and at the French Faculty of Economics.

**J. L. Berggren** is a professor of mathematics at Simon Fraser University, British Columbia. His book *Episodes from the History of Medieval Arabic Mathematics* is in press.

**Jan Hogendijk** has recently got his Ph. D. in the History of Mathematics from the University of Utrecht. It is a study of Ibn al-Haytham's restoration of the lost eighth book of Apollonius' *Conics*.

**E. S. Kennedy** is professor emeritus at the American University of Beirut. He has written many books and articles on astronomy and mathematics in medieval Islam.

**David A. King** is associate professor of Arabic and history of science at New York University. He has published extensively on medieval Arabic astronomy.

After two years at the IHAS, **Richard Lorch** is now back in Munich, where he is working at the Kepler Kommission of the Bayerische Akademie der Wissenschaften. In May and June 1983, he was Visiting Professor at the University of Hamburg, most of his lectures being on medieval Arabic Science, and technology.

**Roshdi Rashed** is director of research at the CNRS Institute for the History of Science, University of Paris. His many publications on the history of algebra and geometry include a critical edition of 'Umar al-Khayyām's *Algebra* (IHAS, 1981).

**Lutz Richter-Bernburg** is Assistant at the Seminar für Arabistik, University of Göttingen. His interests include the history of medicine as well as general history of medieval Islam.

**George Saliba** is assistant professor of Arabic and Islamic sciences, Department of Middle East Languages and Cultures, Columbia University. He is interested in the exact sciences in medieval Islam. He is preparing an edition of the astronomical works of Mu'ayyad al-Dīn al-'Urdī and Ibn al-Shāṭir, both of Damascus.

At the University of Barcelona, **Mercè Vádrich** is pursuing her interest in the translation of Arabic astronomical works into Latin and Spanish.

**Ursula Weiser** is the editor of the cosmological treatise *Sirr al-Khalīq*, published by the Institute for the History of Arabic Science. She is working on the history of Arabic biology and medicine.

Moreover, several passages in the Alphonsine treatise have such striking similarities with the corresponding ones in the pseudo-Mashā'allāh's Latin text that we might very well suggest that one of them is a direct translation of the other. This leads us to the contributions made, in 1951, by G. Menéndez Pidal on the translation techniques of the Alphonsine School. According to him, in the first period of translations (1250-60) one of the translators who knew Arabic dictated a translation of the text into Castilian and this was re-translated orally into Latin by another scholar, while a scribe copied it out; the originality of the alphonsine translations lies in the introduction of an intermediate link consisting in a scribe who copied out the Castilian version<sup>9</sup>. If we accepted Menéndez Pidal's hypothesis, then it might be tempting to consider that in some of the chapters of *De Compositione Astrolabi* we might have the remains of an Alphonsine Latin version for which the Castilian version would be the intermediate link<sup>10</sup>.

9. G. Menéndez Pidal, "Como trabajaron las escuelas alfonsíes", *Nueva Revista de Filología Hispánica*, year V, no. 4 (Mexico, Cambridge Mass., 1951) pp. 363-380.

10. About the alphonsine treatise and the hispanic tradition on the plane astrolabe see:

M. VILADRICH and R. MARTÍ, *En torno a los tratados hispánicos sobre construcción de astrolabios hasta el siglo XIII*. Textos y Estudios sobre Astronomía Española en el siglo XIII. Barcelona, 1981, 79-99.

R. MARTÍ and M. VILADRICH, *Las tablas de climas en los tratados de astrolabio del manuscrito 225 del "Scriptorium" de Ripoll*, "LLull," (Boletín de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias) 4, 1981, 117-122.

R. MARTÍ y M. VILADRICH, *En torno a los tratados de uso de astrolabio en el-Andalus, la Marca Hispánica y Castilla hasta el siglo XIII*. Nuevos Estudios sobre Astronomía Española en el siglo de Alfonso X. Barcelona 1983, 9-74.

M. VILADRICH y R. MARTÍ, *Sobre el "Libro dell Ataqir" de los Libros del Saber de Astronomía de Alfonso X el Sabio*, *ibidem*, 75-100.

Chap. II. Aptatio Rethus sive Tele  
Arance seu Valsagore Rubrica.

Chap. 13. De inscriptione almocant  
tharach capitulum.

Chap. 14. De Divisione e orientis et  
ayaimucht per arcum.

Chap. VII. De como deus seer enta-  
llada la rod dell astrolábio.

Chap VIII. De como se deuen fazer  
las líneas en que son los almocan-  
tarat et los sinuat et las oras et pri-  
meramente de como deuen seer  
fechos los almocantarat en ellas.

Chap. IX De como deuen seer  
fechos los sinuat.

It is now appropriate to recall the contribution made by J. Samsó<sup>6</sup> whose principal aim was to suggest that the notes on Ptolemy's *Planisphaerium* by the Xth century astronomer Maslama al-Majriti are one of the sources used to compile the *Libro del Astrolabio Llano* by Alphonso X the Wise. He bases his argument on the coincidences and parallelisms that could be established between Maslama's work and chapters V, VI, and IX of the Alphonsine book, which respectively concern the division of the ecliptic in signs and degrees, the projection of the fixed stars onto the spider and the tracing of the azimuthal circles. As has been observed, these are some of the very chapters which identify most closely with those bearing the same content in the section of the text *De Compositione Astrolabii* contained within chapters 7 to 16.

The relationship that can therefore be established between the three texts allow us to suggest the hypothesis of the attribution of chapters 7 to 16 of *De Compositione Astrolabii* to Maslama's School. This hypothesis seems to receive support from Kunitzsch's remark on the *explicit* appearing in some manuscripts of the pseudo-Māshā'allāh, at the end of the chapter 16 (*Finis opus astrolabii secundum Marcellaniam*): according to him "the name given in the MS is unequivocally a transcription of the Arabic Maslama".<sup>7</sup> At the same time, this would lend further support to the relationship established by Samsó between Maslama's notes on Ptolemy's *Planisphaerium* and the Alphonsine *Libro del Astrolabio Llano*. Even if Maslama never actually wrote a complete treatise on the construction and use of the astrolabe, it is likely that his disciples Ibn al-Šaffār and Ibn al-Samh were aware of his methods. Bearing in mind that we have knowledge of a lost book by Ibn al-Samh on the construction of the astrolabe, and knowing that he was a well-known author at the Alphonsine court,<sup>8</sup> we might consider the possibility of identifying part of a Latin version of this lost text with chapters 7-16 of *De Compositione Astrolabii*.

6. J. Samsó "Maslama al-Majriti and the Alphonsine Book on the Construction of the Astrolabe". *Journal for the History of Arabic Science* (Aleppo, 1980), vol. 4, pp. 3-8.

7. P. Kunitzsch "On the authenticity..." p. 46.

8. See J. Samsó, "Maslama al-Majriti ..." (see note 6), p. 8. For Ibn al-Samh see F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. 6 (Leiden: Brill, 1978), p. 249.



grados ex Gemina.<sup>3</sup>

Hunc divide universum circulum  
signorum per singulos gradus,

ut patet in figura.

(R. T. Gunther, *Chaucer and  
Messiahalla on the astrolabe*,  
pp. 204-205).

grados de canero.

Et en exienplo desto sobredicho podrá  
partir todo el círculo sobredicho de  
los signos por grados ó por qual cuento  
quisierdes.

Et esta es la figura desto que auemos  
dicho.

(Rico y Sinobas. Libros II, pp.  
232-233.)

Recently, P. Kunitzsch<sup>4</sup> has put forward a whole series of arguments about the origins of the text published by R. T. Gunther. He claims that the treatise in question is, in fact, a compilation of different texts written between the Xth and the XIIth centuries, some of them literal translations from the Arabic into Latin<sup>5</sup>. Although it is not possible, as yet, to establish the exact origins of all the materials of which the text consists, Kunitzsch does point out that it is wrong to attribute to Māsha'allāh the section to the treatise *De Compositione Astrolabii* which includes chapters 7 to 16. It is precisely this part of the treatise which is related to the Alphonsine text, as is shown in the following list of chapter-headings, which demonstrates the correspondences between the two texts:

*Chap. 7. Preambulum ad Compositionem  
Rethi et Tabularum Altitudinum.*

*Chap. III. De como se deve fazer  
la red et primeramente de como  
deuen acualar en ella el círculo  
de capricornio et de aries et de  
libra et el círculo de canero.*

*Chap. 8. De constitutione Zodiaci  
et eius divisiones.*

*Chap. IV De como deve ser fecho  
el círculo de los signos dell astrolabio*

*Chap. 9. De divisione circuli signorum  
sive Zodiaci Capitulum.*

*Chap. V. De como deve ser partido  
el círculo de los signos.*

*Chap. 10. Sequitur de inscriptione  
Stellarum fixarum in Rethi in eius  
Zodiaco.*

*Chap. VI. De como se deuen poner  
las estrellas fixas en la red.*

3. This difference between the two texts is due to Gunther's correction (see R. T. Gunther, p. 205, footnote 1).

4. See P. Kunitzsch "On the authenticity of the treatise on the composition and use of the astrolabe ascribed to Messalīah", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* vol. 31, no 106, 1981, pp. 42-62.

5. See P. Kunitzsch "On the authenticity . . ." p. 43-48.

ad un puncto *k*, deinde extrane dyametrum *bd* in directo, donec abscindat circulum signorum super *h*. Tunc punctus *u* erit punctus capitis Libræ, et punctus *h* Capricorni,

et punctus *c* Arctis, et punctus

*z* capitis Cancræ.

Post hoc pone arcum *dl* et arcum *bm* unumquemque scilicet istorum ex 30 gradibus. Deinde queres arcum qui est super punctum *m* et *k* et *l* et abscindet circulum signorum super *ns*,

eritque *hs* arcus signum Sagittarij.

et arcus *an* signum Geminorum.

Post hoc pones unumquemque ex arcibus *lg* et *mf* 30 gradus.

Deinde queres arcum qui vadit per puncta *f*, *k*, *g* et abscindet circulum signorum super *gs*, eritque arcus *ax* signum Scorpionis, et arcus *ng* Tauri, et remanebit arcus *an* signum Libræ, et arcus *gc* signum Arctis.

Post hoc pone arcum *hs* sicut arcum *hs*

et arcum *or* sicut arcum *ax*,

eritque *re* signum

Piscium et arcus *ro* signum

Aquarii, et arcus *hs* signum

Capricorni. Postea etiam pones

arcum *zs* sicut arcum

*an* et arcum *op* sicut

arcum *ng*, eritque arcus *op*

signum Virginie et arcus *ps*

signum Leonis, et arcus *es*

signum Cancræ. Et similiter

si poneris arcum

*dl* 3 gradus, et arcus

*bm* similiter eases

arcus *hs* 3 gradus ex

Sagittario et arcus *on* 3

de *ds* sobre el punto de *q* et desende saca el diámetro de *bd* en derecho faze que tale et círculo de los signos en el punto de *b* et sera el punto de *a* el punto de la cabeça de libra et sera el punto de *h* el punto de la cabeça de capricornio

et el punto de *g* sera el punto de la cabeça de aries et el punto de *s* sera el punto de la cabeça de cancro Et desende faz en ell arco de *dlbm* cada uno dellos de

XXX grados et farás un arco que passa por el punto de *m* et de *g* et de *l* et talará el círculo de los signos en los dos puntos de *n* et de *p*

et será ell arco de *hp* el signo de sagittario

et ell arco de *an* el signo de gémini.

Et desende farás otrosí cada uno de los arcos de *bm* 30 grados et farás un arco que passe por el punto de *fx* et talará el círculo de los signos en los dos puntos de *ke* et será ell arco de *pe* el signo de escorpion et ell arco de *nk* el signo de tauro et fincará ell arco de

*kg* el signo de aries.

Et desende farás ell arco de *hs* tamanno como ell arco de *hp* et ell arco de *ro* tamanno como ell arco de *pe*

et será ell arco de *go* el signo de piscia et ell arco de *os* el signo de aquario et ell arco de *sh* el signo de capricornio. Et desende farás otrosí ell arco de *zs* tamanno como ell arco de *an* et ell arco de *zo* tamanno como ell arco de *nk* et será ell arco de *no* el signo de virgo et ell arco de *oz* el signo del leon et ell arco de *zs* el signo de cancro. Et

si ouieres puesto de primero ell arco de *dl* por tres gradus et ell arco de *bm* por otros tres sería ell arco de *hs* tres gradus de capricornio et ell arco de *ax* tres

## NOTES AND COMMENTS

### On the Sources of the Alphonsine Treatise Dealing with the Construction of the Plane Astrolabe

MERCÈ VILADRICH\*

The aim of this paper is to demonstrate that some of the chapters of the Alphonsine book on the construction of the plane astrolabe are a translation - in some cases only a partial translation and in others a complete translation - of the same Arabic original used as the source for part of the *De Compositione Astrolabi* attributed to the astrologer Māsha'allāh, who lived in Bagdad in the second half of the eighth century A.D., and published by R. T. Gunther.<sup>1</sup> To show some of the similarities between the two texts, I give below, in two parallel columns, the chapter from the Latin text published by Gunther and the corresponding passage from the Alphonsine treatise,<sup>2</sup> which deal with the division of the Zodiac:

9. *De divisione circuli signorum  
sive Zodiaci Capitulum.*

Cumque feceris circulum signorum

oportet te postea dividere eum per  
signa et gradus signorum,

cuius rei exemplar est ut  
facias circulum capituli Aristis  
et Libre qui est abed  
et diametra abscindat se  
super circulum signorum eum.

Desde divides abed  
per 360 gradus.  
Post hoc pone arcum et similem  
dimidio totius declinationis.  
Desde iunge a cum i,  
et abscindet linea et dyametrum

V. *De como deve ser partido el círculo  
de los signos*

Quando ouieres fecho el círculo de  
los signos

dévese partir por  
los signos et por los grados de los  
signos.

Et dímote á esto exemplo que  
fagas el círculo de aries  
et libra et este círculo de abgd  
et los dos diámetros se ayuntarán  
sobre el punto de e et escreuirás sobre el  
círculo de los signos asgā  
et desende parte el círculo de abgd  
por CCC et LX partes iguales  
et fíz el arco de gi tamaño como  
la mead de la declinacion general  
et desende llega la a con la i  
et talará la linea de as el diametro

\* Facultad de Filología, Universidad de Barcelona. Barcelona.

1. R. T. Gunther, *Early Science in Oxford*, vol V: *Chaucer and Massahalla on the astrolabe*, (Oxford, 1929) pp. 195-231. I am grateful to J. D. North, who sent photocopies of this edition to Barcelona.

2. Rico y Sinobas, *Libros del Saber de Astronomia*, vol II, (Madrid, 1863) pp. 242-252. See a fairly recent survey on Alphonsine astronomical works and King Alfonso's collaborators in D. Romano "Le opere scientifiche di Alfonso X e l'intervento degli ebrei". *Oriente e Occidente nel Medioevo. Filosofia e Science*, Accademia Nazionale dei Lincei (Roma, 1971) pp. 677-711.

phy of the respective author (pp. 75-96). The bibliography includes a list of the existing editions of medieval Arabic treatises on the subject and a list of selected studies on Arabic chemistry and alchemy. The volume is rounded off by an Arabic-German glossary of technical terms.

These carefully prepared and annotated readings can be warmly recommended to everyone who wants to get acquainted with the medieval (al)chemical literature of the Arabs, especially to beginners in the Arabic language. Teachers in the history of Arabic science will also welcome this chrestomathy as a valuable – and long overdue – auxiliary for university courses. It is to be hoped that further source-books of this kind will soon follow!

URSULA WEISSER

Institut für Geschichte der Medizin

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

*Quellengeschichtliches Lesebuch zur Chemie und Alchemie der Araber im Mittelalter* ( *Kutub fi 'Ilm as-sinā'a* ). Herausgegeben von Karl Garbers und Jost Weyer (Quellengeschichtliche Lesebücher zu den Naturwissenschaften der Araber im Mittelalter, Bd. 1). Hamburg: Buske 1980. XII, 114 pp. DM 19.80.

This bilingual source-book contains a collection of short medieval chemical and alchemical texts in the original Arabic language with facing German translation. It is the first volume of a new series of anthologies on Arabic science edited by the Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, Mathematik und Technik of the University of Hamburg (Germany), which are intended primarily for university students. The establishment of such a series may be regarded as an indication for the growing awareness among western historians of science that, in view of the important role played by Muslim scholars in the general development of science, a certain knowledge of the Arabic language is a desirable qualification for everyone working in this field. To promote the spread of this knowledge is the principal aim of the new "Lesebücher". Didactically prepared texts will help the beginner to familiarize himself with terminology and linguistic peculiarities of Arabic scientific prose. At the same time, he can get a first orientation in the history of the particular science in medieval Islam, its methodology, standards and achievements.

The chrestomathy reviewed here is a cooperative work of Karl Garbers, one of the last surviving pupils of the great Julius Ruska, and Jost Weyer, an historian of chemistry with particular interest in alchemy, who is responsible for the choice of texts. Most of the 28 Arabic passages presented here are taken from works which have appeared in print before. The selection, which includes sections from treatises by Ja'far as-Sādiq, Jābir ibn Ḥayyān, al-Kindī, Abū Bakr ar-Rāzī, Ibn Umayl, Ibn Sinā, al-Hamadānī, al-Khāzinī, Abū l-Qāsim al-Īrāqī and the encyclopedist al-Qazwīnī, seems to be fairly well-balanced. The various aspects of medieval chemistry, alchemy and theory of matter as well as practical chemistry, are adequately considered. A minor short-coming is perhaps the extreme brevity of some of the excerpts; none of them comprises more than two pages, and several are considerably shorter. All texts have been provided with a new German translation by Garbers, whose close rendering of the Arabic wording will be appreciated by readers to whom the language of the original still presents some difficulties. The second part of the book comprises the commentaries written by Weyer. He starts with a concise historical introduction to the background and evolution of Arabic alchemy and chemistry and to the main problems the medieval alchemists were concerned with (pp. 53-73). There follow technical and terminological annotations to each single text, preceded by a short biogra-

*Reference Books for the Historian of Science: a Handlist*, compiled by S. A. Jayawardene (London: Science Museum Library, Occasional Publications 2, 1982). xiv + 229 pages. £ 2.50.

This *Handlist* contains well over a thousand items and is divided into forty-four sections arranged under headings "The History of Science and its Sources", "History and Related Subjects", and "General Reference". It includes for instance, sections on biographies, patents, theses, international exhibitions, scientific manuscripts, historical method, and encyclopaedias.

In the field of medieval science there are some noticeable omissions: e.g. A. B. Emden's bio-bibliographical works, such as his *A Biographical Register of the University of Oxford to A.D. 1500* (Oxford, 1957-9); F. E. Peters, *Aristoteles Arabus. The Oriental Translations and Commentaries on the Aristotelian Corpus* (Leiden, 1968); and F. Stegmüller, *Repertorium Commentariorum in Sententias Petri Lombardi* (Würzburg, 1947; supplement by R. P. V. Doucet, Florence, 1954). More serious is the omission of Brockelmann's *Geschichte der arabischen Literatur* and supplements (Leiden, 1898-1942) and J. D. Pearson's *Index Islamicus*. These and similar oversights will reduce the value of the *Handlist* for the beginning student, though such specialist works can doubtless be found through the references that the *Handlist* does give. But, as every maker of bibliographies knows, it is easier to carp than to compile. Besides, the strength of the *Handlist* lies in its general reference and history sections.

Not only will the *Handlist* give the student a useful survey of bibliographical resources, but it will save almost every historian of science many hours of tedious work. To take one example, in section XII there are bibliographical details of the *Proceedings* (and related literature) of all the International Congresses of the History of Science.

The *Handlist* is well produced, with clear type and ample margins (and over twenty pages of blank paper at the end, no doubt for the user's *addenda*). There are two excellent indexes: author/title and subject. At £ 2.50 the book is remarkably good value.

RICHARD LORCH

Institute for the History of Arabic Science  
Aleppo University.

7 - Anyone working with manuscript sources sympathizes with Sezgin's difficult task of identifying the authorship of those manuscripts. What Sezgin does in the doubtful or anonymous cases is to try to determine the authorship by internal evidence (e.g. p. 106, 149 n.1.), select important identifying items for future researchers (pp. 128, 170), and does not refrain from correcting catalogue entries whenever they exist (e.g. pp. 128, 131), or even correct secondary literature on the subject (pp. 133, 290). If all attempts fail, he hopes that future research will reveal the authorship, and to facilitate that research he gives the reader detailed contents of the manuscript with full incipits and key phrases (e.g. 184, 305).

8 - Manuscripts existing in fragments are identified as such and an attempt is made to bring together parts that are scattered in libraries as far apart as Damascus and Munich (p. 163).

9 - While discussing specific topics, Sezgin goes through voluminous works in an attempt to isolate the relevant material, although these works may already exist in print as belonging to other subject matter. Anyone interested in the problem of tides will find it very convenient to know that the subject was discussed by Mas'ûdi in *Murûj* I, 244f. as already identified by Sezgin.

10 - Finally, this reviewer has nothing but admiration for the kind of labor Sezgin must have gone through in order to sift the multivolume work of Ibn Sîdah in search for its sources that are mainly lost, or in search of material relating to astrology or meteorology (pp. 365 - 369).

The following notes are given in the hope of being incorporated in the future "Nachträge".

1 - p. 26. The attack of 'Alî b. 'Isâ al-'Asfurlâbi against astrology was used by Ibn Qayyim al-Jawziyyah in his *Mifhâh Dâr al-Sa'âdah*, Beirut ed. vol. 2, p. 148f.

2 - p. 43. The *tafsîr* of Ṭabarî of the *Tetrabiblos* is extant in Uppsala 203.

3 - p. 43. An early copy of Hunain's translation of the *Tetrabiblos* is extant in Escorial 1829.

4 - p. 132. Kindî's treatises 8, 9, and another one on astrology were published by L. V. Vaglieri & G. Celentano in "Trois Épîtres d'Al-Kindî", *Annali, Istituto Orientale di Napoli* 34 (ns. xxiv) 1974, pp. 523 - 562 giving the text in facsimile and a French translation.

5 - p. 223. Another fragment of Theophrastus's meteorology is extant in Aligarh, University Collection 119.

GEORGE SALIBA

feel, as this reviewer does, the debt to Sezgin's patience and dedication.

The following remarks are organized in two main types: A) an attempt is made in the first set of notes to isolate the main features that distinguish this work from others comparable to it, and B) a few additional remarks are supplied in the hope that they may be considered for the future "Nachträge" which I am sure will appear in the forthcoming volumes in this series.

1 - After placing astrology and meteorology in their proper context within the Arabic literary tradition (7 - 14, 205 f), unlike the authors of comparable works, Sezgin goes to great length in evaluating the works of specific authors whenever he thinks that such works are of major importance in that tradition (cf. e.g. the evaluation of the meteorological works of Ibn al-'Amīd 278f, and those of Ibn Sīnā 292f).

2 - In his detailed discussion of early Arabic astrology (8, 163) Sezgin correctly notes that at least during the Umayyad period (p. 8) astrology was closely related and depended on political power for its survival.

3 - In the same area of general observations, it is significant to note with Sezgin that most of the Arabic astrological works that were translated into Latin in the Middle Ages were not of the mathematically technical type (p. 13). The whole topic of that transmission, however, has yet to be studied in detail.

4 - Unlike the authors of comparable works, Sezgin continues to exploit every primary source he can lay hands on, be it published or in manuscript form, to collect the data he needs for bio-bibliographical information, and thus brings to light works of which we should otherwise have been unaware (cf. e.g. 18, 19, 81, 93, 129, 343, *et passim*). To give an example of the width of the range of the research, we note that Sezgin has gone through the multivolume *Murūj al-Dhahab* of Mas'ūdī to collect the information on Ḥunayn Ibn Ishāq's *al-Masā'il al-Ṭabī'iyyah* from volume VII of Mas'ūdī's work (p. 267). In another instance he goes through the treatise of Ibrāhīm ibn Sīnān on the movement of the sun—which belongs properly in astronomy—to define Ibrāhīm's position on Aristotle's meteorology (p. 274). Finally, Sezgin does not shy away from going through voluminous Arabic philological works to gather information on Arabic meteorology.

5 - Several times Sezgin goes beyond the short references to earlier sources and tries to analyze the contents of the manuscripts he is surveying in order to determine their possible sources (p. 249) or originality (pp. 263, 274), or to draw attention to their importance for specific subjects (p. 146 astrology and *ghayb*, p. 155 astrology and medicine, p. 163 astrology in war).

6 - At other times he quotes the manuscripts at great length to highlight their importance, thereby rendering an incomparable service to the reader who has neither the time nor the means to investigate these manuscripts first hand (cf. e.g. p. 85, 164 - 165, 172, 314, 359 *et passim*).



## Book Review

Fuat Sezgin, *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, Bd. VII, Astrologie - Meteorologie und Verwandtes bis ca. 430H., xvi + 486p., bibliog., indices, Leiden: Brill 1979.

Students of Arabic and Islamic studies need no introduction to the works of Sezgin, for the early volumes of this series are now standard references for the early period of Arabic studies. In this volume Sezgin adheres to the method he followed in the earlier volumes, and once more the student of the History of Arabic Science is treated to a detailed reference work, this time on Arabic Astrology, Meteorology and related matter.

This volume is divided into two major parts: 1) Astrology and 2) Meteorology. Under each division Sezgin reviews the state of the art, the sources of our knowledge of the subject - usually and excellent bibliographical list of primary reference material, sources of the subject itself - mainly Greek, Syriac and Indian, and finally a list of the Arabic authors on the subject some 100 astrologers and a similar number of writers on meteorological and related disciplines. Following the practice established in the earlier volumes, Sezgin adds his corrigenda in the form of "Nachträge" to the present volume as well as to the earlier ones. There is also a 'select' bibliography - not inclusive of all the works cited or mentioned in the body of the text, and extensive indices.

Although most of this working apparatus may look as if it is routine work, the reader should be advised that Sezgin's own interpretation of the status of the fields under discussion and their significance is to be found on almost every page, but especially in the sections titled "Anfänge, Entstehung und Entwicklung" (26f, 205f). Moreover, the reader is made aware of Sezgin's attempt to place these fields within their social context, as in the case of listing the attacks upon and defenses of astrology, (22f). In short, no student of Arabic astrology or meteorology, no matter what background or methodological persuasion he comes from, will, for a long time to come, be unable to do any serious work in either subject without a frequent reference to Sezgin's work.

The other comparable works that come readily to mind are those of Suter - for astrologers -, Brockelmann - for both subjects -, and Ullmann - for both subjects and others -, but none of these works come in any way close to the richness of Sezgin's, be it in its extensive survey of manuscripts or in its wide-ranging survey of holdings in libraries scattered in the most inaccessible parts of the world. Any one who has been engaged in any way with research in manuscripts held in India, North Africa, Turkey and Iran, will for ever

## To Contributors of Articles for Publication in the *Journal for the History of Arabic Science*

1. Submit the manuscript in duplicate to the Institute for the History of Arabic Science. The text should be typewritten, double-spaced, allowing ample margins for possible corrections and instructions to the printer. In matters of paragraph-indentation and the indication of footnotes, please follow the style used in this journal.

2. Please include a summary – if possible in Arabic, but otherwise in the language of the paper – about a third of the original in length.

3. Bibliographical footnotes should be typed separately according to numbers inserted in the text. They should be double-spaced as well, and they should contain an unabbreviated complete citation. For books this includes author, full title (underlined), place, publisher, date, and page-numbers. For journals give author, number, year, and page-numbers.

### *Examples :*

O. Neugebauer, *A History of Mathematical Astronomy* (New York: Springer, 1976), p. 123.

Sevim Tekeli, "Takıyüddin'in Sidret ül-Müntehâ'sına aletler bahsi", *Belleter* 25 (1961), 213-238.

After the first quotation, if the reference is repeated, then the author's name and the abbreviation *op. cit.* may be used. Alternatively, the books and articles cited may be collected into a bibliography at the end of the article, according to the above format, so that reference may be made to them in the footnotes by author or short title.

4. In the transliteration of words written in the Arabic alphabet the following system is recommended:

‘ , b , t , th , j , h , kh , d , dh , r , z , s , sh ,

ا ب ت ث ج ح خ د ذ ر ز س ش

s , d , t , z , ‘ , gh , f , q , k , l , m , n , h , w , y ,

س د ت ز ع غ ف ق ك ل م ن ه و ي

**Hamza** at the beginning of a word is omitted in transcription. The *lām* of the Arabic article before sun-letters is not assimilated (thus *al-shams* and not *ash-shams*).

For short vowels, *a* is used for *fatha*, *i* for *kasra*, and *u* for *damma*. For long vowels diacritical marks are drawn over the letters: *ā*, *ī*, *ū*. The diphthong *aw* is used for *‘a*, and *ay* for *‘i*. Long vowels before *hamzat al-wasl* are printed long (thus “*abū’l-Qāsim*” and not “*abu’l-Qāsim*”).

tempted to disprove the existence of such lines because they believed the parallel postulate to be true. It is therefore interesting that **D** refers to a medieval geometer who doubted some of the consequences of the parallel postulate.

## 6.2 Conjectural identification of **D**.

Following Saidan, Bulgakov and Ahmedov<sup>5</sup> I shall attempt to identify **D**. Al-Bīrūnī says in the list of his own works mentioned above that he wrote a

Treatise on (the fact) that the necessities of the infinite subdivisibility of magnitudes are related to the matter of the two lines which approach each other but do not meet in the distance, in ten leaves.<sup>58</sup>

The contents of **D** agree with this title, especially the reference to the two converging parallel lines. The infinite subdivisibility of magnitudes is also used in **D**.

It seems plausible that **D** is part of a work of Al-Bīrūnī, because **D** is found between other works of Al-Bīrūnī (**B**, A 40) and because **D** is well-written in a concise Arabic, which is different from the monotonous style of many other geometers.

So **D** is probably a fragment of the above-mentioned work on parallels of Al-Bīrūnī. This fragment seems to contain between one-half and one-fifth of the work.<sup>59</sup>

→  
*prima ipse universae geometricae principia* (Milano, 1733), book 1, propositions 30-33. Translated into German in F. Engel, P. Stäckel, *Die Theorie der Parallelen von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895), pp. 41-136 (esp. pp. 104-109). Translated into English in G. B. Halsted, *Girolamo Saccheri's Euclides vindicatus* (Chicago-London: Open Court Publications, 1920).

58. Sachau, *Chronologie* (see note 18), XXXXIV 4. Following the MS (Leiden, Or 133, 45 12-13), Sachau reads *tafazzu' al-maqādir lā ilā nuḥāya*. The correct reading is *tafazzu' al-maqādir ilā lā nuḥāya*.

59. This is apparent from a comparison between the length of some other treatises of Al-Bīrūnī in MS Bankipore 2468 and their length according to his own indications in the list edited by Sachau (note 18). See the following table

Treatise	No. of leaves in Bankipore 2468	No. of leaves acc. to Al-Bīrūnī	see Sachau page
<b>A 33</b>	50	200	XXXXI
<b>A 34</b>	5½	15	XXXXII
<b>A 35</b>	22	60	XXXXIII
<b>A 40</b>	17½	80	XXXXIV
<b>B</b>	18 extant	70	XXXXI
<b>D</b>	1 extant	10	XXXXIV

6. D: a fragment of Al-Bīrūnī's *Treatise on (the fact) that the necessities of the infinite subdivisibility of magnitudes are related to the matter of the two lines which approach each other but do not meet in the distance*.

### 6.1 Description of D.

The beginning of D is a proof that any segment of a straight line is infinitely subdivisible; the proof uses the existence of parallels and the fact that one can find infinitely many points on a straight line on one side of a given point. This proof is attributed in D to Al-Kindī (died after 256H./870 A.D.).<sup>53</sup>

Next D discusses an "objection" by a person whose name is not mentioned. This objection probably refers to part of the text which is now lost. It is based on the opinion of this person that the existence of parallel (that is: non-intersecting and being in the same plane) straight lines which approach each other "on one side" would not be surprising.

The author of D states that in his opinion two non-parallel straight lines do meet.<sup>54</sup> But then he gives some examples of in which two non-parallel straight lines (i. e. line segments) approach each other without ever meeting. The idea is basically that one or both of the segments may be extended an indefinite number of times in such a way that the point of intersection is approached but not reached.

The historical interest of D is in the reference to the person who believed that there may in fact be parallel straight lines which approach each other in one direction. This assumption contradicts the parallel postulate of Euclid (if the other axioms of Euclid are assumed to hold). However, asymptotically approaching parallels exist in hyperbolic geometry, which was created by Bolyai, Lobachevski and Gauss early in the 19th century.<sup>55</sup> The idea of two converging parallels is mentioned by earlier geometers, for example Proclus (5th century A.D.)<sup>56</sup> and Saccheri (1733).<sup>57</sup> However, these geometers at-

53. See GAS 5, 255-259 for the mathematical work of Al-Kindī.

54. The meaning of this statement is not clear, because by definition two non-parallel straight lines have a point of intersection. Perhaps the author meant that he believed the parallel postulate to be true; or he may have taken *mutawāḍir* in the sense of "equidistant".

55. For a survey of the history of the parallel postulate and non-Euclidean geometry and references see M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times* (New York: Oxford University Press, 1972), Ch. 36 (pp. 361-88), R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry, a critical and historical study of its development* (translated from the Italian), (New York: Dover, Reprint 1955), see also notes 56 and 57. For attempts by medieval Islamic geometers to prove the parallel postulate see A. P. Juschkewitch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (translated from the Russian), (Leipzig, 1964), pp. 277-288.

56. See Proclus, *Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Translated by Glenn R. Morrow (Princeton, 1970), pp. 151, 285 (= Proclus, ed. Friedlein, Leipzig 1873, pp. 192, 364-5).

57. See G. Saccheri, *Euclides ab omni novo vindicatus, seu conatus geometricus quo stabiliumur*



We draw lines  $GS^{40}$  and  $ND$  parallel to  $AB$ . Then they (8) are known<sup>41</sup> because they meet two assumed lines.

We join  $KN$ . We draw (9)  $GM^{42}$  parallel to it and meeting  $DN$  in point  $M$ . Then point  $M^{43}$  is known, since  $KN$  (10) is known in position.

Let  $SE$  and  $HE$  meet  $AB$  in  $F^{44}$  and  $O$ . Then (11) the ratio of  $LT$  to  $TC$  becomes equal to the ratio of  $LF$  to  $GS$ ,<sup>45</sup> and the ratio (12) of  $LI$  to  $DI$  becomes equal to the ratio of  $OL$  to  $DN$ .

But the ratio of  $DK$  to (13)  $KG$  is equal to the ratio of  $DN$  to  $NM$ .<sup>46</sup> So the ratio of  $LF$  to  $GS^{45}$  (14) is compounded of the ratio of  $OL$  to  $DN$  and the ratio of  $DN$  to  $NM$ .<sup>47</sup> (15) But that is the ratio of  $OL$  to  $MN$ .

So, *permutando*, the ratio of (16)  $LF^{48}$  to  $OL$  becomes equal to the ratio of  $GS$ , which is known, to  $MN$ , which is known (17). And line  $DF^{49}$  is known.

So point  $L$  is known.

The solution of this problem by Ibrāhīm ibn Sinān is in a mathematical sense related to the theorem of Desargues;<sup>50</sup> this can be shown in the following way (fig. 2). We repeat the same procedure, for the same points  $K$ ,  $D$ ,  $G$  and the same lines  $EZ$ ,  $EH$  but for another line  $A'B' \parallel AB$ , using the notations  $I'$ ,  $T'$ ,  $L'$ ,  $F'$  and  $O'$  as in fig. 2.

We have  $F'L' : L'O' = GS : NM = FL : LO$ , so  $L'$ ,  $L$  and  $E$  are collinear. This result can also be derived by means of the theorem of Desargues: lines  $DG$ ,  $I'T'$  and  $IT$ , joining the vertices of triangles  $DI'I$  and  $GT'T$ , pass through one point ( $K$ ), so the points of intersection  $E$ ,  $L'$ ,  $L$  of the corresponding sides ( $I'I$  and  $T'T$ ,  $DI'$  and  $GT'$ ,  $DI$  and  $GT$ ) are collinear.

It should be emphasized, however, that there is no such idea as the theorem of Desargues in the reasoning of Ibrāhīm ibn Sinān. Ibrāhīm ibn Sinān probably viewed the problem simply as the construction of a plane transversal figure  $LG KG KIT LID$  such that  $K$ ,  $D$  and  $G$  are three given collinear points and  $L$ ,  $I$  and  $T$  are on three given lines.

The "Exquisite Problems" constitute a work which is interesting for sev-

40.  $GS$  in  $MS$ ,  $HS$  in  $RI$ .

41. both in position (because  $GS \parallel AB$ ,  $ND \parallel AB$ ) and magnitude (because  $G$  and  $EZ$  are known and  $D$  and  $EH$  are known). The two assumed lines are  $EZ$  and  $EH$ .

42.  $GM$  in  $MS$ ,  $HM$  in  $RI$ .

43. I have emended the  $MS$  to  $\text{منطقة } \overline{M} < \text{منطقة } \overline{M}$ ,  $RI$  has only  $\text{منطقة } \overline{M}$ .

44. The  $MS$  is illegible.  $RI$  has  $B$ .

45.  $LK$  to  $GS$  in  $MS$ ,  $LK$  to  $HS$  in  $RI$ .

46.  $NM$  in  $MS$ ,  $IM$  in  $RI$ .

47.  $NM$  in  $MS$ ,  $LM$  in  $RI$ .

48.  $LK$  in  $MS$  and  $RI$ .

49.  $OF$  in  $MS$ ,  $OB$  in  $RI$ .

50. See for example C. Boyer, *A History of Mathematics* (New York: Wiley, 1968, ), p. 395, and any introductory book on projective geometry.

From the book of Ahmad ibn Muhammad ibn 'Abd al-Jalil (al-Sijzi) on the exquisite problems which were currently being discussed between him and the geometers of Shirāz and Khorāsān, and his (own) additions.

- 1 Our synthesis of an important proposition from the book of Ibrāhīm ibn Sinān on the exquisite problems.
- 2 If lines  $AB$ ,  $ZE$  and  $ER$  are assumed, and points  $G$ ,  $D$  and  $K$  on one straight line are known, how do we draw two lines  $GTL$  and  $DIL$ , meeting  $\angle AB$  in one point and meeting  $ZE$  and  $EH$  in points  $T$  and  $I$  such that the points  $T$ ,  $I$  and  $K$  are on one straight line? (fig. 1)
3. Let us draw  $GS$  and  $DN$  parallel to  $AB$ . We join  $NK$
4. We draw  $GM$  parallel to  $NK$ . We extend  $ND$  in a straight line to  $M$  such that it meets line  $MG$  in  $M$ .
5. We extend  $ZE$  and  $HE$  in a straight line towards  $F$  and  $O$ . We make the ratio of  $LF$  to  $OL$  equal to the ratio of  $GS$  to  $MN$ .
6. We draw  $GL$  and  $DL$  such as to meet lines  $ZF$  and  $HO$  in points  $T$  and  $I$ . We draw  $KT$ .
7. I say that line  $KT$  passes through point  $I$ .
8. Proof of that: the ratio of  $OL$  to  $MN$  is compounded of the ratio of  $OL$  to  $DN$  and the ratio of  $DN$  to  $NM$ .
9. But the ratio of  $LF$  to  $GS$  is equal to the ratio of  $LT$  to  $TG$ , because of the similarity of triangles  $LFT$  and  $GST$ .
10. And the ratio of  $LO$  to  $DN$  is equal to the ratio of  $LI$  to  $ID$  because of the similarity of triangles  $LOI$  and  $DNI$ .
11. And the ratio of  $DN$  to  $NM$  is equal to the ratio of  $KD$  to  $KG$  because of the similarity of triangles  $DNK$  and  $DMG$ .
12. So the ratio of  $LT$  to  $TG$  is compounded of the ratio of  $LI$  to  $ID$  and the ratio of  $KD$  to  $KG$  (by 5, 9, 10, 11).
13. So point  $I$  is common to lines  $LD$ ,  $HO$  and  $KT$ , since figure  $LGKGKITLID$  is a plane transversal figure.<sup>36</sup>
14. That is what we wanted to prove.

The analysis which corresponds to this synthesis is in  $C_1$  f 4b:3-19 =  $RI$  6, "*Al-handasa wa-'ilm al-nujūm*", 17:19-18:17. I give an English translation below. The figure is the same as the figure belonging to the synthesis of Al-Sijzī. Numbers between parentheses refer to page and line numbers in  $RI$  6. I shall use the conventions of section 4.2.

If lines  $AB$ ,  $ZE$  and  $EH$  are assumed and two points (18.1)  $G$  and  $D$  are known, and point  $K$  is known, and points  $G$ ,  $D$  and  $K$  (2) are on one straight line, how do we draw two lines  $GTL$ <sup>37</sup> and  $DIL$  (3), meeting  $AB$  in one point and meeting  $ZE$ <sup>38</sup> and  $EH$  in points (4)  $T$  and  $I$  such that points  $T$ ,  $I$  and  $K$  are on one straight line?

Let us assume (5) that this is the case. Then the ratio of  $LT$  to  $TG$  is compounded of the ratio (6) of  $LI$  to  $DI$  and the ratio of  $DK$  to  $KG$ , as is proven in (7) the *Almagest*.<sup>39</sup>

36. If  $X$  is the point of intersection of  $LD$  and  $KT$  we have according to the theorem of Menelaos:  
 $\frac{LT}{TG} = \frac{LX}{XD} \cdot \frac{KD}{KG}$ . By line 13  $\frac{LT}{TG} = \frac{LI}{ID} \cdot \frac{KD}{KG}$ , hence  $X=I$ . The theorem of Menelaos for plane transversal figures is proved in the *Almagest* of Ptolemy, I:13, ed. Heiberg, Leipzig 1898, vol.1 p. 69-70. German translation (of K. Manitius) in *Ptolemaeus, Handbuch der Astronomie* (Leipzig, 1963), vol. I, p. 46.

37.  $HTL$  in  $RI$ ,  $CTL$  in  $MS$ .

38.  $ZE$  in  $MS$ ,  $DE$  in  $RI$ .

39. *Almagest*, I:13; see note 36.

will be transcribed according to the conventions of Hermelink and Kennedy.<sup>34</sup> Sentences into which I have divided the text are indicated by numbers.<sup>35</sup>

34. H. Hermelink, E.S. Kennedy, "Transcription of Arabic Letters in Geometrical Figures", *Journal of the American Oriental Society*, 82 (1962), 204 = "Transkription mathematischer Bezeichnungen in arabischen Schriften", *Sachoff's Archiv*, 45 (1969), 85.

35. The Arabic text is from MSS X 52a:10-20 and I 61b:10-62a:3.

من كتاب أحمد بن محمد بن عبد الخليل ( السجزي ) في المسائل المختارة التي حثرت بين يديه  
شيراز وخراسان وتعليقاته

1 تركيبا لشكل خطير من كتاب إبراهيم بن سنان في المسائل المختارة

2 إذا كانت خطوط  $\overline{أ ب}$  و  $\overline{ز هـ}$  موضوعة ونقط  $\overline{ج د}$  على

خط مستقيم معنونة كيف يخرج خطين كخطي  $\overline{ج د}$  على

يلقيان  $\langle \overline{أ ب} \rangle$  على نقطه واحدة ويلقيان  $\overline{ز هـ}$  على نقطتي

$\overline{ج د}$  حتى يكون نقط  $\overline{ط ي}$  على خط مستقيم

3 فلنخرج  $\overline{ج س}$  [ و ] دن يوزيان  $\overline{أ ب}$  ونصل  $\overline{ن ك}$

4 ونخرج  $\overline{ج م}$  يوازي  $\overline{ن ك}$  ونخرج  $\overline{ن د}$  على استقامته

إلى  $\overline{م}$  يلقي خط  $\overline{م ج}$   $\langle \overline{على م} \rangle$

5 ونخرج  $\overline{ز هـ}$  على استقامتها إلى  $\overline{ف ع}$  ونجعل  $\overline{ن هـ}$

ل  $\overline{ف}$  إلى  $\overline{ع}$  كنسبة  $\overline{ج س}$  إلى  $\overline{م د}$

6 ونخرج  $\overline{ج د}$  ذلك نقطان خطي  $\overline{ز ف}$   $\overline{ح ج}$  على نقطتي

$\overline{ط ي}$  ونصل  $\overline{ك ط}$

7 أقول أن خط  $\overline{ك ط}$  يجوز على نقطة  $\overline{ي}$

8 برهان ذلك أن نسبة  $\overline{ع ل}$  إلى  $\overline{م د}$  مؤلفة من نسبة  $\overline{ع ل}$  إلى  $\overline{د ن}$

ومن نسبة  $\overline{د ن}$  إلى  $\overline{م ن}$

9 فلما نسبة  $\overline{ل ف}$  إلى  $\overline{ج س}$  هي كنسبة

$\overline{ل ط}$  إلى  $\overline{ط ج}$  لاشتباه مثلثي  $\overline{ل ف ط}$   $\overline{ج س ط}$

10 وأما نسبة  $\overline{ل ع}$  إلى  $\overline{د ن}$  فهي كنسبة  $\overline{ل ي}$  إلى  $\overline{ي د}$  لاشتباه

مثلثي  $\overline{ل ع ي}$   $\overline{د ي ن}$  (I, 1,62a)

11 وأما نسبة  $\overline{د ن}$  إلى  $\overline{م ن}$  فهي كنسبة  $\overline{ك د}$  إلى  $\overline{ك ج}$  لاشتباه

مثلثي  $\overline{د ن ك}$   $\overline{د م ج}$

12 فنسبة  $\overline{ل ط}$  إلى  $\overline{ط ج}$  إذا مؤلفة من نسبة  $\overline{ل ي}$  إلى  $\overline{ي د}$

ومن نسبة  $\overline{ك د}$  إلى  $\overline{ك ج}$

13 فننتقل  $\overline{ي}$  إذا مشتركة لخطوط  $\overline{ل د}$   $\overline{ح ع}$   $\overline{ك ط}$  لأن شكل

$\overline{ل ج}$   $\overline{ك ج}$   $\overline{ل ي د}$  ليد قطع مستط

وذلك ما أردنا أن نبين



That this is really so is proved by reference in a work of Al-Sijzī, namely the "Book by Ahmad ibn Muḥammad ibn 'Abdaljalīl (al-Sijzī) on the exquisite problems which were currently being discussed between him and the geometers of Shirāz and Khorāsān, and his (own) additions" (*Kitāb Ahmad ibn Muḥammad ibn 'Abdaljalīl fī'l-masā'il al-mukhtāra allatī jarat baynahu wa-bayna muhandisī Shirāz wa-Khorasān wa-ta'liqātuhu*, see GAS 5, 333 no. 23.). A version of this work survives in two manuscripts:

*I* = MS Istanbul, Reşit 1191, ff. 31b-62a, undated.

*X* = MS Dublin, Chester Beatty Library 3652, ff. 35a-52b, dated 612 H./1215 A.D.<sup>33</sup>

In *I* and *X* Al-Sijzī presents his synthesis of what he calls an important proposition from the book of Ibrāhīm ibn Sinān on the Exquisite Problems. The corresponding analysis is in *C*<sub>1</sub> on f. 4b, which proves that *C*<sub>1</sub> is in fact the *Exquisite Problems*.

Below I give English translations of the synthesis of Al-Sijzī and the analysis of Ibrāhīm ibn Sinān. My reason for doing this is first to present in detail the sources for identifying *C*<sub>1</sub>, and secondly to draw the attention of the reader to a hitherto neglected work which seems to be of some importance for the history of geometry.

In the translated passages Ibrāhīm ibn Sinān and Al-Sijzī deal with the following problem (fig.1):

Given: three straight lines *AB*, *EZ*, *EH* and three collinear points *G*, *D*, *K*. Required: two straight lines *GL*, *DL* intersecting in a point *L* such that the following relations are satisfied:

1. *L* is on *AB*.
2. *GL* intersects *EZ* in a point *T*, and *DL* intersects *EH* in a point *I* such that *T*, *I* and *K* are collinear.

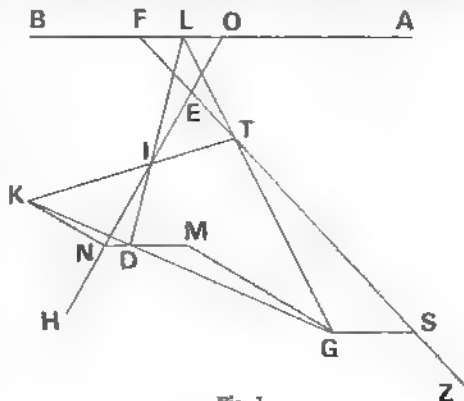


Fig. 1

I have added some words to the texts in the manuscripts; these words will be translated in pointed brackets. Arabic letters in geometrical figures

33. See A.J.Arberry, *A Handlist of the Arabic Manuscripts in the Chester Beatty Library*, vol. 3 (Dublin, 1958), p. 59 no. 7.

This is a proof of a method for calculating the equation of the sun, which is the same as the proof in the second section of the third *maqāla* in B. This section is entitled:

On the proof of a calculation which came to my mind by means of the properties of the broken line in the circle<sup>27</sup>

From the material presented above we can draw the conclusion that B contains a version of Al-Birūnī's *Treatise on the solution and the division of the equation*. This treatise must have been written in or before 418 H./1027 A. D. because it is mentioned in the version of the *Extraction of Chords* which Al-Birūnī finished in Rajab 418 H./July-Aug. 1027 A.D.<sup>28</sup>

### 5. Identification of $C_1$ as the Exquisite Problems of Ibrāhīm ibn Sinān.

Ibrāhīm ibn Sinān says in his *Letter on the Description of the Notions he Derived in Geometry and Astronomy* (A 24) that he wrote a treatise called the *Exquisite Problems*<sup>29</sup> (*Al-masā'il al-mukhtāra*). This treatise contained solutions of

41 geometrical problems, namely difficult problems on circles, lines, triangles, tangent circles and other things.<sup>30</sup>

Ibrāhīm ibn Sinān says that he

followed the method of analysis only, without giving syntheses, except in the case of three problems, where syntheses were necessary.<sup>30</sup>

$C_1$  is a geometrical text from which only part of the preface is missing. In  $C_1$  about 40 geometrical problems are treated. The exact number is to some extent arbitrary, depending on whether certain auxiliary problems are counted separately. The author of  $C_1$  must be Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit, because it contains a reference to "my grandfather Abū'l-Ḥasan Thābit".<sup>31</sup>

In  $C_1$  an analysis is given of all problems, but only three syntheses occur.<sup>32</sup> So it is likely that  $C_1$  is part of the *Exquisite Problems*.

27. *RB* 1, 136 4-5 = f. 305b 7-8. The proof is in 305b:7-22, continued on f. 309a:1-7 = *RB* 1, 136.3-138 1, continued on *RB* 1, 153.19-154 10, edited in *Dimirdāsh* 213-216. The corresponding method of calculation is explained in the second section of the second *maqāla*, which is in *RB* 1, 117:13-118:10, edited in *Dimirdāsh* 184-185. It is discussed by Kennedy and Murawwa *op. cit.* p. 115-116 as method 2. Note that *RB* 1, 117 13-118 10 is part of  $C_1$ , and that the remark of Kennedy and Murawwa, p. 116 left column, "In this connection Bīrūnī gives the proof. Apollonius is mentioned several times in the passage" refers in fact to  $C_1$ , not to B.

28. The date is in MS Bankipore 2468, f. 326a, printed in *RB* 1, 226 11-12; = *Dimirdāsh* 287:6-7.

29. f. 132a 23-24 = *RI* 3, 69:5 = edition by Saliba (see A 24), 200:330.

30. f. 132a.12-15 = *RI* 3, 68:8-11 = ed. Saliba 200.20-22.

31. f. 308b:20 = *RB* 1, 153 1 = *Dimirdāsh* 286 19. This was already pointed out by Anbousa in "Ṭarīḥ al-Dā'ira", *JHAS*, 1 (1977), 382 note 6.

32. The syntheses are on ff. 308a:28-308b:30 = *RB* 1, 150:4-152 12 = *Dimirdāsh* 285:7-286:18; f. 3a 7-29 = *RI* 6, 11:1-12:8; f. 10a:10-10b:18 = *RI* 6, 46-12-50.16.

This description agrees with the extant part of the preface in B. In order that the reader can check this statement himself, I give a tentative translation of f. 325a:1-15 = RB 1, 219:16 - 220:13 below. Dots indicate places where one or two words in the manuscript are illegible. All additions of mine are in parentheses. I have indicated in footnotes all places where I read the manuscript differently from the editors of RB.

...<sup>19</sup> containing the values of the equation of the sun from the *zij* of Ḥabash. He found in ... a place where there was a big difference between the two lines in smallness (?) in the two margins... to it, and at this (point) the matter of those numbers became irregular. Therefore he asked me about this situation, as somebody trained in working with geometrical lines and accustomed to work on geometrical proofs ... at (that) time, with a<sup>19</sup> number<sup>20</sup> of methods for calculation, to which thinking on them (the geometrical lines and proofs) had led me, some of them being easy, others being difficult. Thereupon none of them produced to the person who had asked<sup>21</sup> (the question) anything which agreed<sup>22</sup> with what he had asked about.

I was inclined to attribute this to the negligence of Ḥabash in calculating those tables, or to inattentiveness on the part of transcribers, till I returned to the collections of *zijes*<sup>23</sup> mentioned above. Then I found in them a method of Ḥabash for solving the equation, dividing it, explaining it and making it clear. When I tried it, it produced for that place (in the table) a value equal to the value in the table. Thus I learnt that Ḥabash had used it, but nobody else.

Then I thought over its proof, and I enjoyed myself by thinking over the proofs of other (methods), till the ways to the knowledge of all of them had opened up, and the ways to the proof of them had been illuminated by tireless attention<sup>24</sup> to what made the perception of them obscure. Because of the multitude of them it was possible to devote a book to them, containing a very useful<sup>25</sup> specialism in astronomy, and for training those who dislike the dreariness of uncritical copying, not the remaining (uncritical) followers. I have made it, and it is this book.

The following reference is also of interest for the identification of B. In the *Extraction of Chords* Al-Birūnī presents what he calls a

Solution of the equation <and division of it> for half of the deferent, from my book concerning this subject.

(RB 1, 72:1 — 74:14, the words in angle brackets are not in the Bankipore manuscript, but they are in the Leiden manuscript translated by Suter<sup>26</sup>).

19. f. 325a:1-4 have been printed incorrectly in RB 1, 219.16-220.1. I read the manuscript as follows:

المحتوى تعاديل الشمس من زيج حبش هو جد في .. موضعا عظم فيه تفاصل ما بين الطرفين في صغرة (؟) في حاشيته .. يليه ورأى به أمر تلك الأعداد على الطام وألغى عن كيفية الحال .. كن متدبرا بممارسة الخطوط المساحة ومعاودة البراهين المنتهية .. في الوقت بما حضري

20. The MS is not very legible. I conjecturally read *عنه*

21. *أسائل* as in 325a:6, not *أسائل* as in RB 1, 220:2.

22. RB 1 omits *مواقفا* which is in 325a:6 after *شيئا*

23. *المنتقاة العربية* as in 325a:8.

24. *بالدروب* as in 325a:12.

25. *عظيم الشأن* as in 325a:13.

26. *Op. cit.* (see section 3, A 40) p. 45-46 no. 11.

#### 4.1 The contents of B.

The subject of B is the calculation of the equation of the sun. For a discussion of the problem and terminology I refer to the article by Kennedy and Muruwwa mentioned in section 3 under B.

B is part of a text which once consisted of four *maqālat* (plural of *maqāla* = big chapter). The extant part of the first *maqāla* contains a fragment of a preface, which will be translated below, and a full discussion of terminology and preliminary theorems.

The second and third *maqāla* are extant in B. They present 16 methods for calculating the equation of the sun and give geometrical proofs for the correct methods. The 16 methods are discussed in full in the article by Kennedy and Muruwwa mentioned above. These authors say that the text they discuss is part of the *Rasā'il al-Birūnī* (letters of Al-Birūnī), but they do not give a further identification.

Only part of the fourth *maqāla* is extant in B. Kennedy and Muruwwa do not discuss this *maqāla*, but I use their notation for the second and third. It deals with the following problem. Given two of the following four parameters: the mean anomaly  $\bar{\lambda}$ , the true anomaly  $\lambda$ , the equation  $e$  and its maximal value  $e_{max}$ , required to determine the other two parameters. This leads to six combinations (*qurānāt*), which are listed in the extant part of the fourth *maqāla*: to solve the problem if 1.  $\lambda$ ,  $e_{max}$ , or 2.  $\lambda$ ,  $e$ , or 3.  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$ , or 4.  $e_{max}$ ,  $e$ , or 5.  $e_{max}$ ,  $\lambda$ , or 6.  $e$ ,  $\lambda$ , are given. Then the text runs:

"It is necessary that we finish the book by mentioning them (the 6 combinations) in detail" (RB 1, 179:13). Hence the fourth *maqāla* was the last one. The text is broken off in the middle of the second combination.

In conclusion: B is almost the complete text of a treatise on the solar equation.

Dimirdāsh edited a small part of the first *maqāla* and the complete second and third *maqālas* as part of Al-Birūnī's *Extraction of Chords*. He erroneously rendered the beginning of C<sub>1</sub> (the *Exquisite Problems* of Ibrāhīm ibn Sinān) as "fourth *maqāla*". C<sub>1</sub> begins on p. 246 of his edition.

#### 4.2 Identification of B.

In the list of the works he completed before the end of 427 H. Al-Birūnī says that he had composed:

because of a question of somebody who suspected (something) in the tables of the equation of the sun and who did not discover the method of Ḥabash for solving it, a treatise on the solution and division of the equation, in 70 leaves.<sup>18</sup>

18. The list has been edited in: *Chronologie ou: Orientalischer Völker von Alberūnī. Herausgegeben von Dr. C. Edward Sachau* (Leipzig 1876), pp. XXXVIII-XXXVIII. The quoted passage is on p. XXXXI lines 1-2. On Ḥabash see GAS 6, 173-175.

- f. 324 = 214:10 *wa-annahā* (MS: *wa lā annahā*) - 219:16 *ma'lūmā* + fig. 117.  
 f. 321 = 201:9 *kadhālika* - 206:11 *ma'lūm* + figs. 109, 111.  
 f. 318 = 184:12 *fa-TC* - 190:5 *murabba'uhu* + fig. 102.  
 f. 320 = 196:1 *ma'lūman* - 201:9 *faql* + figs. 107, 108.  
 f. 319 = 190:5 *fa-murabba'* BZ 196:1 *ilā DG* + figs. 103, 104.  
 (figs. 103, 104 are the same as figs. 105, 106 respectively)  
 f. 306a:1-4 = 108:9 *ma'lūma* - 108:14 *ilā HZ*.  
 f. 306a:4 - 308 = 138:1 *ilā khatt ma'lūm* - 153:19 *nugla* + figs. 74-79.

ff. 2-20b has been printed in *RI* 6, "*Al-Handasa wa 'Ilm al-Nujūm*" (5:7 *idh*-end). Ff. 324, 321, 318, 320, 319, 306-308b:24 have been edited in the correct order in *Dimirdash* 246:9-286:23 as part of the *Extraction of Chords* of Al-Bīrūnī.

C<sub>2</sub> Cat 3 (p 62) f 21a-39b. *Maqāla li-Ibrāhīm ibn Sinān fī tariq al-tahlīl wa'l-tarkīb wa-sā'ir al-a'māl fī'l-masā'il al-handasiyya*. Treatise by Ibrāhīm ibn Sinān on the method of analysis and synthesis and the other procedures in geometrical problems. *CAS* 5, 294, no 2. Printed: *RI* 2. The last leaf of the treatise is missing. The complete text, which is in MS Paris, Bibliothèque Nationale, Fonds Arabe 2457, 1b-18b and MS Cairo, Dār al-Kutub Muṣṭafā Fāḍil Riyāḍa 40m, 130b-153b, is about 15 lines longer than the text in MS Bankipore 2468.



F. 317 is a fragment of Al-Bīrūnī's *Maqāla fī anna lawāzīm tajazzu' al-maqādir ilā lā nihāya qarība min al-khaṭṭayn alladhayn yaqrubān wa-lā yal-taqyān fī'l-istib'ād*. Treatise on (the fact) that the necessities of the infinite subdivisibility of magnitudes are related to the matter of the two lines which approach each other but do not meet in the distance, see section 6 of this paper. The treatise is listed in *CAS* 5, 383 no. 13 as a lost work. Printed in *RB* 1, "Istikhraj al-Awtār" (180:15 *sarafa* - 184:12 *B* + figs. 100-101). Russian translation with commentary in P. G. Bulgakov, A. A. Ahmedov, "Beruni: al-Kindi o teorii parallel'nykh", *Obščestvennye nauki v Uzbekistane* (1977), 30-36. Review by E. S. Kennedy in *Mathematical Reviews*, March 1981, no. 81c: 01008. F. 317 was not edited by Dimirdash.

4. B: *The Treatise on the solution and the Division<sup>17</sup> of the Equation by Al-Bīrūnī*,

17. The word division probably refers to the different ways in which the equation has to be calculated according to the different positions of the sun.

## B

B is not mentioned in the catalogue. It consists of ff. 325, 322, 299-305, 309-316. B is a fragment of Al-Birūnī's *Maqāla fī'l-tahkīl wa'l-taqṣīṣ li'l-ta'dīl*; Treatise on the solution and the division of the (solar) equation, see section 4 of this paper. The treatise is listed in GAS 6, 273 no. 11 as a lost work. Printed in RB 1, "Istikhrāj al-Awtār":

- f 325 = 219:16 *al-mukṭawwā* - 224:1 'anhu;  
 f 322 = 206:12 *fa-ammā* - 209:10 min + figs. 110-114;  
 f 299 - 305 = 108:15 *al-mutaṣāwiyatayn* - 138:1 *sāra*;  
 f 309 - 316 = 153:9 *lanā* - 180:15 *ilā* + figs. 85-99.

The Arabic text in ff. 299-305 and ff. 309-316 has been edited in *Dimirdāsh* 172:2 - 245, as part of the *Extraction of Chords* of Al-Birūnī. Dimirdāsh realized that the text on f. 305b continues on f. 309a.

F. 316b:1-23 (= RB 1, 179:1-180:15) and ff. 322, 325 was not edited by Dimirdāsh.

Part of the treatise is discussed in E. S. Kennedy, Ahmad Muruwwa, "Biruni on the solar equation," *Journal of Near Eastern Studies*, 17 (1958), 112-121.

## C

C consists of two parts C<sub>1</sub> and C<sub>2</sub>.

C<sub>1</sub>: f 324, 321, 318, 320, 319, 306-308, 2-20b is part of Ibrāhīm ibn Sinān's *Al-Masā'il al-Mukhtāra*, the exquisite problems. See section 5 of this paper. The work is mentioned in GAS 5, 294<sup>15</sup> under no. 6. The first 8 extant leaves have been printed in RB 1, "Istikhrāj al-Awtār":<sup>16</sup>

15. Sezgin mentions references made by Ibrāhīm ibn Sinān to Abū'l-'Alā' ibn Karmīb (GAS 5, 300), Abū'l-'Abbās ibn Yahyā (GAS 5, 300-301), Abū Yahyā (GAS 5, 303) and 'Alī ibn al-Ḥasan ibn Ma'dān (GAS 5, 304). These references are not in the "Letter . . . on the description of the notions he derived in geometry and astronomy" (A 24), but in the "Exquisite Problems" (C<sub>2</sub>).

Sezgin says (GAS 5, 381 under no. 6) that a fragment of a book by Al-Birūnī on tangent circles has been preserved in the printed text of Al-Birūnī's *Extraction of Chords*, RB 1 218-129. However, this part of the printed text is part of the "Exquisite Problems" of Ibrāhīm ibn Sinān, who refers to his own book on tangent circles (which is mentioned in GAS 5, 294 no. 6). So GAS 5, 381 no. 6 has to be omitted.

Anhouba also remarked that Al-Birūnī probably did not write a book on tangent circles, and that Ibrāhīm ibn Sinān is the author of part of the text edited by Dimirdāsh as Al-Birūnī's *Extraction of Chords*. See A. Anhouba, *Tasbiḥ al-dā'ira* (in Arabic), JHAS, 1 (1977), 352-384, esp. 382 note 6.

16. At this point Saidan's references are not altogether correct (op. cit., see note 5).

book on Making Easy the Roads to the Geometrical Propositions (*kitābunā fi tashīl subul ilā 'l-ashkāl al-handasiyya*, f.280a:24 = RM 8, 3:5) and "our book on the Properties of the Egg-shaped and Lentil-shaped Figures" (*kitābunā fi khawāṣṣ al-shakl al-bayḍi wa'l-'adasi*, f.280b:18 RM 8, 5:5) Al-Sijzī is known to have written a work on "making easy the roads for deriving geometrical figures" (CAS 7, 410 no. 38). Al-Sijzī refers to a work of his on the egg-shaped and lentil-shaped figure (the solids of revolution of an ellipse around its major and minor axis respectively) in his *Introduction to the Science of Geometry* (*al-Madkhal ilā 'ilm al-handasa*, CAS 5, 333 no. 20, MS. Dublin, Chester Beatty 3652, 16a:17). As far as is known, no other Arabic geometer has written about these figures. We know that Al-Sijzī also wrote on the "fact" that all figures are derived from the circle (CAS 7, 410, f) Thus Al-Sijzī is probably the author of the treatise A 39.

A 40 Cat 42 (p 92) f 282b-298,326a, rest 243a-260a. *Kitāb Abū'l-Rayhān Muḥammad ibn Ahmad al-Bīrūnī fi 'istikhrāj al-awtār fi'l-dā'ira bi-khawāṣṣ al-khaṭṭ al-munhanā al-wāqī' fihā*. Book of ... Al-Bīrūnī on the extraction of chords in the circle by means of the properties of the inscribed broken line. CAS 5, 381 no. 3. Printed in RB 1, "*Istikhrāj al-Awtār*": f 282b-298 beginning - 108:8 *al-musāwiyā li-zāwiya* + figs. 1-72; f 326a = 224:2 ... 0 end + fig. 118, right side.

Edition of the Arabic text in ff. 282b-298 in *Dimirdāsh* 32 - 172:2; f. 326a: 21-29 is edited in *Dimirdāsh* 286:24-287:7. The text in f. 326a:1-20 has not been edited by *Dimirdāsh* (it is, however, on the facsimile of f. 326a on p. 31 of his edition). German translation with commentary, both based on a Leiden ms. in H. Suter. "Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abū'l-Rayhān Muḥammad al-Bīrūnī," *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge, 11 (1910), 11-78. A facsimile edition of this Leiden MS (?) was published by Muḥammad Āthār Millī (?) (Teheran (?) 2535 Cyrus (?)), *Silsilat Intishārāt* 124. The Leiden and Bankipore manuscripts of the *Extraction of Chords* are slightly different. Russian translation by S. A. Krasnova, and L. A. Karpova with commentary by B. A. Rosenfel'd and S. A. Krasnova in: *Is istoriki nauki i tehniki b stranah Vostoka*, vol. 3 (Moscow, 1963). See also Muḥammad Saud, "A part of al-Bīrūnī's *Istikhrāj al-Awtār fi 'l-Dā'irah*" in *Hakim Muḥammad Said* (ed.), *Al-Bīrūnī Commemoration Volume* (Karachi: Hamdard Academy, 1973), pp. 691-705. See also A. S. Saidan, "The Trigonometry of Al-Bīrūnī" in the same volume, pp. 681-690.

On f. 326b there is a geometrical figure which apparently does not belong to any of the treatises and fragments in MS Bankipore 2468. The figure has been printed in RB 1, "*Istikhrāj al-Awtār*", fig. 118, left side.

*mad ibn Ahmad al-Birūnī raḥimahu'llāh fī rāshikāt al-Hind*. Treatise by ... Al-Birūnī, may God have mercy upon him, on the Indian rule of three. *GAS* 5, 380 no. 2. Printed: *RB* 4. Russian translation by B. A. Rosenfel'd in *Is istoriia nauki i tekhniki v stranah Vostoka* vol. 3, Moscow 1963. See also Abū'l-Qāsim Qurbānī, *Birūnī-nāma* (in Persian), (Teheran, A.H. solar 1353), pp. 206-219. On the word *rāshikāt* see E. Boilot, "l'Oeuvre d'al-Beruni, Essai Bibliographique," *Mélanges. Institut Dominicain d'Etudes Orientales du Caire*, 2 (1955), 161-256, esp. 188.

**A 35** Cat 38 (p 89) f 245a-266b rest 206a-227b. *Tamhid al-mustaqarr li-tahqiq ma'na'l-mamarr li-Abi'l-Rayḥān Muḥammad ibn Ahmad al-Birūnī*. Smoothing the basis for an investigation of the meaning of transits by .... Al-Birūnī (this is the translation of Professor Kennedy). *GAS* 6, 267, no.3. Printed: *RB* 3. English translation and commentary in: *Al-Biruni on transits. A study of an Arabic treatise entitled Tamhid al-Mustaqarr li-tahqiq ma'na'l-mamarr by Al-Birūnī Translated by Muḥ. Saffouri and Adnan Ifram. With a commentary by E. S. Kennedy*. American University of Beirut, 1959. See also G. J. Toomer, "Notes on Al-Birūnī on transits," *Orientalia*, 34 (1965), 45-72.

**A 36** Cat 39 (p 90) f 267a-276b rest 228a-237b. *Kitāb fī kayfiyyat tasṭiḥ al-kurra 'alā saṭḥ al-aṣṭurlāb .... istukhrāj Ahmad ibn Muḥammad ibn al-Ḥusayn al-Saghānī*. Book on how to project the (celestial) sphere on the plane of the astrolabe... by ... Al-Saghānī. *GAS* 5, 311, no.4. Printed: *RM* 7.

**A 37** Cat 40 (p 90) f 276b-279b rest 237b-240b. *Risālat Ahmad ibn Muḥammad ibn 'Abdahlil al-Sijzī fī'l-shakl al-qattā'*. Letter by ... Al-Sijzī on the transversal figure. *GAS* 5, 332 no. 15. Printed: *RM* 10, pp. 1-22. See J. L. Berggren, "Al-Sijzī on the Transversal Figure", *JHAS*, 5 (1981), 23-36.

**A 38**, not mentioned in the catalogue, f 279b-280a rest 240b-241a. *Al-shakl al-mutassa'*. The nine-sided figure (i.e. the regular nonagon). Anonymous, not mentioned in *GAS*. Printed: *RM* 10, p. 22-24. English translation and commentary by J. L. Berggren, "An Anonymous Treatise on the Regular Nonagon", *JHAS*, 5 (1981), 37-41.

**A 39** Cat 41 (p 91) f 280a-282a rest 241a-243a. *Risāla li-Naṣr ibn 'Abdallāh fī anna 'l-ashkāl kullaha min al-dā'ira*. Letter by Naṣr ibn 'Abdallāh on (the fact) that all figures are derived from the circle. *GAS* 5, 314 no. 1. Printed: *RM* 8.

The author of this treatise was probably not Naṣr ibn 'Abdallāh but Al-Sijzī, for the following reasons. The author of the treatise mentions "our



by F. A. Shamsi in: Hakim Muhammed Said (ed.), *Ibn al-Haytham, Proceedings of the Celebrations of 1000th Anniversary* (Karachi: Hamdard Academy 1969), pp. 228-246.

**A 32** Cat 34 (p 84) f 191a-193b rest 148a-150b. *Risāla fī misāhat al-mujassam al-mukāfi li'l-shaykh Abi Sahl Wayjan ibn Rustam al-Qūhī*. Letter on the volume of the parabolic solid by the master ... Al-Qūhī. *CAS* 5, 318, no.5. Printed: *RM* 6. German translation in: H. Suter, "Die Abhandlungen Thābit b. Kurras und Abū Sahl al-Kūhī über die Ausmessung der paraboloide," *Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Societät zu Erlangen*, 48-49 (1916-7), 186-227. The preface in the MS on f 191a corresponds to the translation on p. 213-215.

A small collection of propositions without marginal number is appended to the preceding treatise. : **A - Cat** 35 (p 85) f 193b rest 150b. *Min kalām Abi Sahl al-Qūhī oydan fīmā zāda min al-ashkāl fī amr al-maqala al-thāniya min kitāb al-Uṣūl li-Uqlidis lammā yuhtaju ilayhi fī'l-maqala al-thāniya wa'l-thālitha min kitāb al-Makhrūfāt*. From what the same ... Al-Qūhī said on the propositions he added to the second book of the *Elements* of Euclid because they are necessary in the second and third book of the *Conics* (of Apollonius) *CAS* 5, 319 no. 15. Not printed.

**A 33** Cat 36 (p 85) f 194a-195, 125-131, 196-217, 220-239b, rest 151a-200b. *Ifrād al-maqāl fī amr al-zulāl taṣnīf al-shaykh Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Ahmad al-Birūnī*. The exhaustive treatise on shadows, composed by the master ... Al-Birūnī. *CAS* 5, 380 no. 1. Printed: ff. 194a-195 = *RB* 2, "Ifrād al-Maqāl" (beginning - 5:10 *ahaduhā*); ff. 125-131 = *RI* 3, "Kitāb fī Ḥarakāt al-Shams" (34:8 *min al-ākhar* - 63-4 *ūyifa*); ff. 196-217, 220-239b = *RB* 2, "Ifrād al-Maqāl" (5:10 *bi-annahā* - end). English translation with commentary in: E. S. Kennedy, *The Exhaustive Treatise on Shadows by Abū al-Rayḥān Muḥammad ibn Ahmad al-Birūnī* (Aleppo: IHAS, 1976), 2 vols. See also H. Hermelink, "Bestimmung der Himmelerichtungen aus einer einzigen Schattenbeobachtung nach Al-Birūnī," *Schoffs Archiv*, 44 (1960), 329-332; E. S. Kennedy, "Birūnī's graphical determination of the local meridian," *Scripta Mathematica*, 24 (1959), 251-255; E. S. Kennedy, Al-Birūnī on the Muslim Times of Prayer, in: P. J. Chelkowski (ed.) *The Scholar and the Saint, Studies in Commemoration of Abū'l-Rayḥān al-Birūnī and Jalāl al-Dīn al-Rūmī* (New York: New York University Press, 1975), p. 83-94; B. A. Rosenfeld, L. G. Utseha, "Some mathematical discoveries in al-Birūnī's Shadows", *JHAS*, 4 (1980), 332-336.

**A 34** Cat 37 (p 88) f 239b-244b rest 200b-205b. *Maqalat Abī'l-Rayḥān Muḥam-*

**Handasa.** Book of Archimedes on the Elements of Geometry. GAS V, 135,7. Printed: RT 1. This treatise is a version of the "Book of Assumptions by Aqāṭun". A facsimile-edition (of an Aya Sofya manuscript) with English translation and commentary (also on the present manuscript) is in Y. Samplonius, *Book of Assumptions of Aqāṭun*, thesis, Amsterdam 1977. See also Y. Dold-Samplonius, "Some remarks on the 'Book of Assumptions by Aqāṭun'", *JHAS*, 2 (1978), 255-263.

**A 28 Cat 30** (p 80) f 144b-145b rest 101b-102b. *Faṣl fī takhṭīṭ al-sāʿāt al-samā-niyya fī kull qubba wa fī qubba yustaʿmalu lahā li'l-Faḍl ibn Ḥatīm al-Nayrīzī*. Chapter on drawing the lines demarcating the unequal hours in every cupola or in a cupola which is used for them, by ... Al-Nayrīzī (on sundials). GAS 6 192 no. 3. Printed: RM 2.

**A 29 Cat 31** (p. 80) f 145b-169a, rest 102b-162a. *Risālat Abī ʿAbdallāh al-Ḥasan ibn Muḥammad ibn Ḥamla al-maʿrūf bi'bn al-Baghḍādī fī'l-magādir al-muṣṭarika wa'l-mutabāyina*. Treatise by Abū ʿAbdallāh ... known as ibn al-Baghḍādī, on commensurable and incommensurable magnitudes. GAS 5, 392. Printed: RM 9. Russian translation in: G. P. Matvievskaia, "Materialy k istorii učenija o čisle na srednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke", in: *Iz istorii točnyh nauk na srednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke* (Tashkent, 1972).

**A 30 Cat 32** (p. 81-83) f 169a-188b rest 126a-145b. *Kitāb inbāt al-miyāh al-khaṣṭiyya taṣnīf Abī Bakr Muḥammad ibn al-Ḥasan al-Ḥāsib al-Karajī*. Book on finding hidden waters, composed by ... al-Karajī. GAS 5, 328,9. Printed: Inb. French translation by A. Mazahéri in: Al-Karagī, *La civilisation des eaux cachées* (Nice, 1973). The Persian translation of this work has been edited by Ḥusayn Khadivjam: *Istikraj-i abbā-yi pinhāni* (Teheran, Iranian Culture Foundation, 1966), 127 pp. See "Muḥammad ibn al-Ḥusayn Karajī, Kitāb-i istikhrāj-i abbā-yi pinhāni tarjuma-yi Ḥusayn Khadivjam" (in Persian), *Sokhan-i ʿIlmī*, 4 (1344 [A.H. Solar]), 408-411. See also Mehdi Nadji, "Karadžis Erschliessung verborgener Gewässer", *Technikgeschichte*, 39 (1972), 11-24, and F. Bruin, *Surveying and surveying instruments. being chapter 26, 27, 28, 29 and 30 of the book On Finding Hidden Waters by Abu Bakr Muḥammad al-Karajī*, *Biruni newsletter* no. 31. (American University of Beirut 1970).

**A 31 Cat 33** (p 84) f 189a-191a rest 146a-148a. *Qawl Ibn al-Haytham fī kḥawāṣṣ al-muthallath min jihat al-ʿamūd*. Treatise by Ibn al-Haytham on the properties of the triangle with respect to the perpendicular. GAS 5, 366 no.4. Printed: RH, appendix. See H. Hermelink, "Zur Geschichte des Satzes von der Lotsumme im Dreieck", *Sudhoffs Archiv*, 48 (1964), 240-247. English translation

Printed: ff. 118a-124b = RI 3, "*Kitāb fi Ḥarakāt al-Shams*" (beginning-34:8 qaww AE), f. 323 = RB 1, "*Istikhrāj al-Awḥār*" (209:10 mithl - 214:10 al-murabba' + figs. 115, 116). F. 1a, has not been printed. This is the reason why Saidan stated that the treatise is incomplete.<sup>13</sup>

A 24 Cat 2 (p 61) f 1b, 131a-132b rest 87a-89b. *Risālat Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit fi wasf al-ma'āni allati 'stakhrajahā fi'l-handasa wa 'ilm al-nujūm*. Letter by Ibrāhīm ibn Sinān on the description of the notions he derived (i.e the works he composed) in geometry and astronomy.<sup>14</sup> GAS 5, 294 no. 4. Printed: f. 1b = RI 6, "*Al-Handasa wa-'ilm al-Nujūm*" (beginning - 5:7 al-khaṭṭ al-wāqī'); ff. 131a-132 = RI 3, "*Kitāb fi Ḥarakāt al-Shams*," 63:4 li-kull - end. Edition of the Arabic text in G. Saliba, "*Risālat Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra fi'l-ma'āni allati 'stakhrajahā fi'l-handasa wa'l-nujūm*" (in Arabic), *Studia Arabica et Islamica, Festschrift for Ihsān 'Abbās*, ed. Wadād al-Qāḍi (American University of Beirut, 1981), pp. 195-203.

A 25 Cat 27 (p 78) f 132b-134b rest 89b-91b. *Kitāb Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit fi misāhat qat' al-makhrūt al-mukāfi*. Book by Ibrāhīm ibn Sinān ... on the area of the parabola. GAS 5, 293, no. 1. Printed: RI 5. German translation in H. Suter, "Die Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit", *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 63 (1918), 214-228. See also B. A. Rosenfeld, M. M. Rožanskaja, "Geometricheskie predstavozaniia i peremennye veličiny u Ibrāhima ibn Sināna" (in Russian), *Istorija i metodologija estestvennyh nauk*, 9 (1970).

A 26 Cat 28 (p 78) f 134b-141a rest 91b-98a. *Kitāb Arshimidis fi'l-dawā'ir al-mutamāssa*. Book of Archimedes on tangent circles. GAS 5, 134 no.6. Printed: RT 2. Edition of the Arabic text and German translation in: *Archimedes Opera Mathematica vol. IV, Über einander berührende Kreise. Aus dem Arabischen von Yvonne Dold-Samplonius, Heinrich Hermelink, Matthias Schramm*. (Stuttgart: Teubner, 1972). Russian translation by B. Rosenfeld in I.N. Veselovski (ed.), *Archimed, Sočinenija* (Moscow, 1962). Spanish translation in J. Vernet, A. Catalá, "Arquímedes árabe: El tratado de los círculos tangentes", *Andalus*, 33 (1968), 53-93. See also Y. Dold-Samplonius, "Archimedes: Einander berührende Kreise", *Südoffs Archiv*, 57 (1973), 15-40.

A 27 Cat 29 (p 79) f 141a-144b rest 98a-101b. *Kitāb Arshimidis fi Uṣūl al-*

13. Op. cit. (see note 5), p. 174.

14. In GAS 6, 194 under no. 3 it has been stated, though wrongly, that this work deals with the geometry necessary for astronomical calculations. In GAS 5, 294 note 1 Sergin mentions "autobiographische Angaben aus einer nicht identifizierbaren Schrift Sinān's"; these references are found in this work of Ibrāhīm ibn Sinān on ff. 131a-132b.

A 17 Cat 20 (p 73) f 106b-109b rest 67b-70b. *Maqālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq fī kashf 'awarī al-Bāṭiniyya bimā mawwahū 'alī 'āmmatihum fī ru'yat al-aḥilla*. Treatise by Abū Naṣr ... on the disclosure of the error of the Bāṭiniyya (school of thought) with which they have misled their people in the observation of the new moon. GAS 6, 245 no.12. Printed: RN 6. See Samsó 36, on the Bāṭiniyya school see *EF*<sup>2</sup>, I, 1131-1133.

A 18 Cat 21 (p 74) f 109b-110b rest 70b-71b. *Risālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Maṣṣūr Amīr al-Mu'minin ilā Abi'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fī ḥall al-shubḥa 'aradāt lahu fī'l-maqāla al-thālutha 'ashar min kitāb al-Uṣūl*. Letter from Abū Naṣr ... to Al-Bīrūnī on the solution of an uncertainty which came to his (Al-Bīrūnī's) mind, in the 13th book of the *Elements* (of Euclid). GAS 5, 339 no. 1. Printed RN 7. See Samsó 33.

A 19 Cat 22 (p 74) f 110a-114a rest 71b-75a. *Faṣl min kitāb li-Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Maṣṣūr Amīr al-Mu'minin ilā Abi'l-Rayḥān fī ḥuriyyat al-samā'*. Chapter from a book of Abū Naṣr ... to Abū'l-Rayḥān (al-Bīrūnī) on the spherical shape of the heaven. GAS 6, 245 no. 11. Printed: RN 9. See Samsó 34.

A 20 Cat 23 (p 75) f 114b-115a rest 75b-76a. *Maqāla fī 'stikhrāj sā'āt mā bayna ṣūlu' al-fajr wa'l-shams kull yawm min ayyām al-sana bi-madīnat Qa'in li-Abi'l-Ḥasan ibn 'Abdallāh ibn Bāmsḥādh al-Qā'ini*. Treatise on the calculation of the hours between the beginning of dawn and sunrise on every day of the year for the city of Qā'in by ... Al-Qā'ini. GAS 5, 337. Printed: RM 4. English translation with commentary in Marie L. Davidian, E.S. Kennedy, "Al-Qāyini on the Duration of Dawn and Twilight," *Journal of Near Eastern Studies*, 20 (1961), 145-153.

A 21 Cat 24 (p 76) f 115b-117a rest 76b-78a. *Maqāla fī 'stikhrāj ta'rikh al-Yahūd wa-a'yādhim ta'lif Abi Ja'far Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī*. Treatise on the calculation of the calendar of the Jews and their feasts, composed by .. Al-Khwārizmī. GAS 6, 143 no. 4. Printed: RM 1. See E. S. Kennedy "Al-Khwārizmī on the Jewish Calendar", *Scripta Mathematica*, 27 (1964), 55-59.

A 22 Cat 25 (p 76) f 117a-118a rest 78a-79a. *Maqāla fī 'stikhrāj ta'rikh al-Yahūd li-Abi'l-Ḥasan 'Alī ibn 'Abdallāh ibn Muḥammad ibn Bāmsḥādh al-Qā'ini*. Treatise on the calculation of the calendar of the Jews by ... Al-Qā'ini. GAS 6, 243 no. 3. Printed: RM 3.

A 23 Cat 26 (p 77) and Cat 1 (p 60) f 118a-124b, 323, 1a, rest 79a-87a (f. 1a has been catalogued wrongly as a separate treatise called "Ar-risālatu fī uṣūl al-raṣād"). *Kitāb Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra fī Ḥarakāt al-Shams*. Book by Ibrāhīm ibn Sinān ... on the movements of the sun. GAS 6, 194 no. 1

in his treatise "The Table of Minutes", *Centaurus*, 16 (1972), 1-19; Samsó 31.

**A 12** Cat 15 (p 70) f 93b-96b rest 54b-57b. *Risālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Mawla Amir al-Mu'minin ilā Abi'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Birūnī fī'l-burhān 'alā 'amal Muḥammad ibn al-Sabbāḥ fī'mtihān al-shams*. Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Birūnī on the proof of the procedure of Muḥammad ibn al-Sabbāḥ in observing the sun. *GAS* 6, 244 no. 4. Printed: RN 2. Spanish translation in Samsó 121-133, commentary in Samsó 59-66. See also J.Samsó in *DSB* IX, 84.

**A 13** Cat 16 (p 71) f 96b-98b rest 57b-59b. *Risālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Mawla Amir al-Mu'minin ilā Abi'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Birūnī fī'l-dawā'ir allatī taḥuddu al-sā'āt al-zamāniyya wa ba'd ma yattasilu bi-'amal al-asturlāb*. Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Birūnī on the circles demarcating the unequal hours and on something related to working with the astrolabe. *GAS* 6, 224, no.8. Printed: RN 1. Spanish translation in Samsó 105-114, commentary in Samsó 53-58.

**A 14** Cat 17 (p 72) f 99a-100a rest 60a-61a. *Risālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Mawla Amir al-Mu'minin ilā Abi'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Birūnī fī'l-burhān 'alā 'amal Ḥabash fī matālī' al-samt fī zījhi*. Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Birūnī on the proof of the procedures of Ḥabash for the ascension of the azimuth in his zīj. *GAS* 6, 243 no. 2 Printed: RN 11. See Samsó 32.

**A 15** Cat 18 (p 72) f 100b-103a rest 61b-64a. *Risālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Mawla Amir al-Mu'minin ilā Abi'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Birūnī fī ma'rifaṭ al-qisṭ al-falakiyya ba'dhiha min ba'd min ḡayr fariq ma'rifaṭiha bi'l-shakl al-qattā' wa'l-nishab al-mu'alafa*. Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Birūnī on the determination (i.e. extraction) of the arcs on the sphere from each other without the transversal figure and the compound ratio. *GAS* 5, 339 no. 3. Printed: RN 8. German translation in P. Luckey, "Zur Entstehung der Kugeldreiecksrechnung," *Deutsche Mathematik*, 5 (1940), 405-446 See also Samsó 32.

**A 16** Cat 19 (p 73) f 103a-106b rest 64a-67b. *Risālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Mawla Amir al-Mu'minin ilā Abi'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Birūnī fī'l-jawāb 'an mas'āl ḥandasyyia sa'alahu 'ankā*. Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Birūnī on the answer to geometrical questions he (Al-Birūnī) asked him (Abū Naṣr). *GAS* 5, 339 no. 4. Printed: RN 10. See Samsó 33.

"New Light on the Zij al-Şafā'iyy of Abū Ja'far al-Khāzin", *Centaurus*, 23 (1980) 105-117.

A 7 Cat 10 (p 67) f 75b-78a rest 36b-39a. *Maqālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Mawlā Amīr al-Mu'minin fī 'islāh shakl min kitāb Mānālāwūs fī'l-kuriyyāt 'adala fihī muṣallihū hādihā'l-kitāb 'an maslakihī.*<sup>12</sup> Treatise by Abū Naṣr ... on the correction of a proposition in the Spherics of Menelaos, in which the correctors of this book have digressed from his method. *GAS* 5, 339 no. 2. Printed: *RN* 12. Spanish translation in *Samsó* 134-150, commentary in *Samsó* 60-70.

A 8 Cat 11 (p 68) f 78a-79b rest 39a-40b. *Maqālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Mawlā Amīr al-Mu'minin fī'l-burhān 'alā haqiqat al-mas'ala allati waqa'at bayna Abi Ḥamid al-Şaghānī wa-bayna munajjimi al-Rayy fihā munāza'a.* Treatise by Abū Naṣr .. on the demonstration of the truth in the question on which there was a controversy between .. Al-Şaghānī and the astronomers of Rayy. *GAS* 6, 244 no.10. Printed: *RN* 13. Spanish translation in *Samsó* 115-120, commentary in *Samsó* 58-59.

A 9 Cat 12 (p 69) f 79b-83a, rest 40b-44b. *Risālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Mawlā Amīr al-Mu'minin ilā Abi'l-Rayhān Muḥammad ibn Aḥmad al-Birūnī fī majāzat dawā'ir al-sumūt fī'l-asturlāb.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Birūnī on the crossings of the azimuthal circles on the astrolabe (i.e. their points of intersection with for example the equator). *GAS* 6, 244 no. 6. Printed *RN* 14. Spanish translation in *Samsó* 89-104, commentary in *Samsó* 49-53.

A 10 Cat 13 (p 69) f 83b-86b, rest 44b-47b. *Risālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Mawlā Amīr al-Mu'minin ilā Abi 'Abdallāh Muḥammad ibn Aḥmad al-Ma'mūnī fī ṣan'at al-asturlāb bi'l-tariq al-ṣinā'i.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Ma'mūnī on the construction of the astrolabe in the practical way. *GAS* 6, 244 no.5. Printed: *RN* 15. Spanish translation in *Samsó* 75-88, commentary in *Samsó* 46-49.

A 11 Cat 14 (p 70) f 86b-93b rest 47b-54b. *Risālat Abi Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Mawlā Amīr al-Mu'minin ilā Abi'l-Rayhān Muḥammad ibn Aḥmad al-Birūnī al-musammā jadwal al-daqa'iq.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Birūnī, called the Table of Minutes. *GAS* 6, 244 no. 7. Printed *RN* 5. See C. Jensen, "Abū Naṣr Maṣṣūr's approach to spherical astronomy as developed

<sup>12</sup> The word used in the manuscript is *muṣallihū* (instead of *maslakihī*), which makes little sense in the context. *RN* and *Samsó* read *shukhihī*. The word *maslak* also occurs at the beginning of the treatise (f. 75b:14,15 = *RN* 12, 3.10,12), thus confirming my reading.

## A

**A 1 Cat 4** (p 63) f 40a-42b rest 1a-3b. *Maqāla li-Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra fi rasm al-qutū' al-thalātha*. Treatise by Ibrāhīm ibn Sinān ... on drawing the three conic sections. *GAS* 5, 293 no. 1. Printed: *RI* 4. Russian translation in "Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra, Kniga o postroenii trekh honičeshik sečenii", *IMI* 16 (1965).

**A 2 Cat 5** (p 63) f 42b-45a rest 3b-6a. *Risāla li-Ibrāhīm ibn Sinān ilā Abī Yūsuf al-Ḥasan ibn Isrā'īl fi 'l-aṣṭurlab*. Letter from Ibrāhīm ibn Sinān to Abū Yūsuf... on the astrolabe. *GAS* 6, 194 no. 2. Printed: *RI* 1.

**A 3 Cat 6** (p 64) f 45a-47b rest 6a-8b. *Risāla fi'l-ab'ād wa'l-ajrām* "an Kūshyār ibn Labbān al-Jilī. Letter on the distances and sizes (of the celestial bodies) by Kūshyār ibn Labbān ... (This is part of *Al-Zij al-jāmi'* by the same author, see *GAS* 6, 248, no. 1) Printed: *RM* 11. See Kennedy, 125, 156-157.

**A 4 Cat 7** (p 65) f 47b-50b rest 8b-11b. *Risālat Abī'l-Wafā' Muḥammad ibn Muḥammad al-Būzjānī ilā Abī 'Alī Aḥmad ibn 'Alī ibn al-Sukr fi iqāma al-burhān 'alā 'l-dā'ir min al-falak min qaws al-nahār wa'rṭifa' nisf al-nahār wa'rṭifa' al-waqt*. Letter from Abū'l-Wafā' ... to Abū 'Alī ... on establishing the proof of the (rule for finding the) arc of revolution from the day arc, the noon altitude and the altitude at the time. *GAS* 6, 224, no. 3. Printed: *RM* 5. See Nadī Nadir, "Abū'l-Wafā' on the Solar Altitude", *The Mathematics Teacher* 51 (1960), 460-3. Dr. Richard Lorch and Dr. Haskell Isaacs have prepared an English translation, to be published in due course.

**A 5 Cat 8** (p 66) f 50b-66b rest 11b-27b. *Risālat Abī Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Maṣlā Amīr al-Mu'minin ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fi barāhin a'māl jadīval al-taqwīm fi zij Ḥabash al-Ḥāsib*. Letter by Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī on the proofs of the procedures of the table of rectification in the Zij of Ḥabash ... *GAS* 6, 342 no. 1. Printed *RN* 4. See Samsó 30; R. Irani, *The "Jadīval al-Taqlīm" of Ḥabash al-Ḥāsib*, thesis, American University of Beirut, 1956; Kennedy, 153; the article Ḥabash al-Ḥāsib by W. Hartner in *EP*, III, 8-9.

**A 6 Cat 9** (p 67) f 66b-75b rest 27b-36b. *Risālat Abī Naṣr Maṣṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq Maṣlā Amīr al-Mu'minin ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fi tayṭih mā waqa'a li-Abī Ja'far al-Khāzin min al-sahw fi zij al-safā'ih*. Letter by Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī on the correction of what Abū Ja'far al-Khāzin overlooked in the Zij of Plates. *GAS* 6, 243 no. 3. Printed *RN* 3. See Samsó 30; M. T. Debarnot, "Introduction du Triangle Polaire par Abū Naṣr b. 'Irāq," *JHAS* 2 (1978), 126-136. On the Zij of Plates see D. King,

The title of every treatise will be rendered in Arabic, exactly as it occurs in the manuscript, and also in English translation. I have made some explanatory additions in brackets. Arabic names will be rendered in abbreviated form in the translations; thus, for example, Abū'l-Rayhān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī will be abbreviated to .... Al-Bīrūnī.

Reference will be made to such modern editions, translations and other relevant publications as are known to me. The cyrillic alphabet will be transcribed according to the system used in the *Mathematical Reviews* and the *Zentralblatt für Mathematik*.

Practically the whole manuscript has been printed (in Arabic) by the Osmania Oriental Publication Bureau (Dā'irat al-Ma'ārif al-'Uthmāniyya) in Hyderabad, in several volumes. These volumes will be abbreviated as indicated below. The notation "XY p, q:r" always refers to line r of page q of the p-th text in volume XY.

RB = Rasā'idu'l-Bīrūnī. Containing four tracts. 1367 H./1948 A.D.

RII = Majma' al-Rasā'id li'l-'allama al-falasāfī Abi 'Alī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Ḥaytham, 1358 H., plus the appendix *Risāla fi khaṭṭiyyat muthallath min jihat al-'amūd*, 1366 H./1947 A.D.

RI = Rasā'idu ibn-i-Sinān, by Ibrāhīm b. Sinān' b. Thābit b. Qurra al-Ḥarrānī, containing six tracts. 1367 H./1948 A.D.

RM = Rasā'idu 'l-Mutafarrīqa fi'l-Bai'at li'l-mutaqaddimīn wa mu'āsiray il-Bīrūnī. Containing eleven important treatises on astronomy and other subjects contributed by the famous predecessors and contemporaries of Al-Bīrūnī (9th, 10th, 11th century A.D.). 1361 H./1948 A.D.

RN = Rasā'id Abi Naṣr dā'l-Bīrūnī, by Abū Naṣr Maṣṣūr b. 'Alī b. 'Irāq, for Al-Bīrūnī. Containing fifteen tracts. 1367 H./1948 A.D.

RT = Rasā'idu ibn Qurra, by Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī. Containing translations of two geometrical tracts of Archimedes. 1366 H./1947 A.D.

INb = Muḥammad b. al-Ḥasan al-Karkhi, Inbā' al-miyāh al-khaṭṭiyya. 1359 H./1940 A.D.

The following abbreviations will also be used.

CAS = F. Sezgia, *Geschichte des Arabischen Schrifttums* (Leiden, Brill). Band 5, Mathematik, 1974; Band 6, Astronomie, 1978; Band 7, Astrologie, Meteorologie und Verwandtes, 1979.

DSB = Dictionary of Scientific Biography, 15 vols (New York: Scribner's Sons, 1972-78).

EI<sup>2</sup> = Encyclopedia of Islam, second edition. (Leiden-London: Brill, 1960 - ....).

Cat. (or catalogue), see footnote 1.

Dimirdāsh m:n = line n of page m of Istikhraj al-awṭār fi'l-dā'ira bi-l-khaṭṭiyyat al-khaṭṭi al-munḥad al-wāqī' fihā. Ta'liṭ Abi'l-Rayhān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī Taḥqiq al-ustādḥ Aḥmad Sa'īd al-Dimirdāsh. Murāja'as al-ustādḥ 'Abd alḥamīd Luṭfi (in Arabic). (Cairo, no date). This is the edition by Dimirdāsh of Al-Bīrūnī's *Extraction of Chords*.

Kennedy = E. S. Kennedy, "A survey of Islamic astronomical tables." *Transactions of the American Philosophical Society, New Series*, vol 46, part 2. (Philadelphia, 1956).

Samso = J. Samso Moya, *Estudios sobre Abū Naṣr Maṣṣūr b. 'Alī b. 'Irāq* (in Spanish). Barcelona 1969

JHAS = *Journal for the History of Arabic Science*.

IMI = *Istoriko-matematičeskije Issledovanija* (in Russian).



These numbers correspond to a division of the first part of A into 29 gatherings, almost all consisting of 8 leaves, in the following way:

40-45 (?), 46-53, 54-61, 62-69, 70-77, 78-85, 86-93, 94 101, 102-109, 110-117 (nos. 1-10); 118-124 + 323, 1 + 131 137, 138-145, 146-153, 154-161, 162 169, 170-177, 178 185, 186-193, 194 195 + 125-130 (nos. 11-20); 196-203, 204-211, 212-217 + 220, 221-228, 229-236, 237-244, 245-252, 253-260, 261-268 (or 266?) (nos. 21-29).

We can now describe the effect of the rebinding on A as follows: The gatherings 11, 12 and 20 fell apart and the pieces were rebound in the wrong order.

The situation regarding the rest of A is more obscure. At the top off. 267a there is a clear  $\text{و}$  (36). This may be a scribal error resulting from the fact that the treatise numbered 36 also begins on f. 267a. F. 269 has a  $\text{ج}$  (30) with perhaps another (illegible) letter attached to it. f. 282 has clearly  $\text{و}$  (32). I have not found other numbers indicating gatherings of A, which does of course not imply that such numbers never existed. The text on ff. 267a-282a and 282b-298 + 326 is continuous.

B, C and D are undated fragments of texts, written in the same hand as A.<sup>11</sup> I have not found any letter indicating a gathering, nor any marginal number in B, C and D. It is therefore conceivable that B, C and D are remainders of what was originally a separate manuscript to which A did not belong. The contents of B, C and D will be listed in section 3.

E is a fragment of a treatise on stellar constellations written in Persian in another hand and obviously at a later date. I shall not discuss it further.

At the very beginning of the manuscript there is an index, which was also compiled at a later date. This index must have been added after the manuscript had been rebound, because it corresponds to its present state.

### 3. The contents of A, B, C and D

This section is a list of the treatises and fragments in A, B, C and D.

The notation "A I Cat 4 (p 63) f 40a-40b rest 1a-3b" means that the relevant treatise is part of A, that it is numbered 1 in the margin of the manuscript, 4 in the catalogue<sup>1</sup> (on page 63) and the secondary literature, that it is on ff. 40a-42b in the numbering of the manuscript but on ff. 1a-3b in the "restored" numbering of A. I have devised this "restored" numbering in such a way that it corresponds to the correct order of the leaves.

11. Another manuscript written by the scribe of A, B, C and D is MS Berlin, Ahlwardt 5658, now Tübingen, Or Quart. 71, containing the *Stellar Constellations* (*Šuwar al-Kawākib*) by 'Abdarrahmān al-Sufi. See GAS 6, 214 and the facsimile of the colophon of this manuscript (dated 630 H., Mosul), plate 10 in:

Abu'l-Ḥusayn 'Abdu'r-Rahmān as-Sūfī, *Šuwaru'l-Kawākib or Uranometry*, edited from the oldest extant Mss. and based on the Uluḡ Beg Royal Codex, Hyderabad (Dār al-Ma'ārif al-'Uthmāniyya), 1373 H./1954 A.D.

tion in the text between f. 217b and f. 220a.<sup>10</sup> The leaves were numbered after being rebound in the wrong order, so the numbers are of no help in establishing the correct order of the treatises. The last leaf of the manuscript is not numbered.

The manuscript can be divided into five continuous parts A, B, C, D and E. These parts consist of the following leaves in the following order:

A = 40 124, 323, 1, 131—195, 125—130, 196—217, 220—298, 326.

B = 325, 322, 299—305, 309—316.

C = 324, 321, 318, 320, 319, 306—308, 2—39.

D = 317.

E = the last leaf of the manuscript.

A contains 40 complete treatises. These are numbered 1-40 in the margin of the manuscript in eastern Arabic numbers. A list of the 40 treatises is in section 3.

All treatises in A were written in Mosul. The copyist wrote on f. 188b that he finished the first 30 treatises in Muharram 632 H./Sept.-Oct. 1234 A.D. The remaining treatises 31-40 are dated separately: nos. 31 and 32 (ff. 189a-193b) were written in Šafar 632 H./Oct.-Nov. 1234 A.D., nos. 33 and 34 (194a-195, 125-130, 196-244b) in Dhū'l-Hijja 631/Aug.-Sept. 1234, no. 35 (245a-266b) in Dhū'l-Qa'da 631/July-Aug. 1234, nos. 36-38 (267a-280a) in Muharram 632/Sept.-Oct. 1234, no. 39 (280a-282a) in Šafar 632/Oct.-Nov. 1234, and no. 40 (282b-298, 326a) at the end of Dhū'l-Qa'da 631/Sept. 1234. So the order of the treatises in A and their marginal numbers do not correspond to the order in which they were copied. But it is likely that the same copyist who wrote the treatises also numbered them, because the numbers in the margin are written in exactly the same way as the numbers in the text.

At the top of some of the leaves of A one can make out Arabic letters whose numerical values indicate the numbers of gatherings. These letters and their numerical values are rendered below, because they show what happened to A when it was rebound incorrectly.

The tops of many pages of the manuscript are damaged. But one can read a fragment of a ٣ (3), a fragment of a ٤ (4), a clear ٥ (5), a fragment of a ٦ (6), and a ٧ (7), and a ٨ (8) on ff. 54, 62, 78, 86, 102 respectively; ٩ (9), ١٠ (10), ١١ (11), ١٢ (12), ١٣ (13), ١٤ (14), ١٥ (15), ١٦ (16), ١٧ (17) and ١٨ (18) on ff. 110, 118, 138, 146, 154, 162, 170, 186 respectively; and ١٩ (19), ٢٠ (20), ٢١ (21), ٢٢ (22), ٢٣ (23), ٢٤ (24), ٢٥ (25), ٢٦ (26), ٢٧ (27), ٢٨ (28) and ٢٩ (29) on ff. 194, 196, 204, 212, 221, 229, 237, 245, 253 and 261 respectively.

10. See E. S. Kennedy, *The Exhaustive Treatise on Shadows by Abū al-Rayhān Muḥammad b. Aḥmad al-Bīrūnī* (Aleppo, JHAS, 1976), vol. 1 (translation), p. 174 note 4.

In section 2 I shall discuss this division and shall investigate what happened to the manuscript when it was rebound.

Section 3 consists of a list of all the treatises and fragments in the manuscript (with the exception of the last leaf), in the correct order and with bibliographical references. Because the numbering on the manuscript corresponds to the present incorrect order of the leaves, I have devised a "restored" numbering corresponding to the original correct order of the leaves. All treatises will be listed in dual numbering. Saidan's statements on the order of the disarranged treatises appear to be correct, apart from a very few exceptions.

M. Dimirdāsh used MS Bankipore 2468 for his edition of the Arabic text of the "Extraction of Chords" of Al-Bīrūnī. However, Dimirdāsh did not fully realize to what extent the manuscript had become disarranged; thus his edition also contains parts of 1. and 2. Detailed references will be given in section 3.

Sections 4-6 deal with the three fragments in the manuscript. In section 4 I shall attempt to prove by means of references in other works of Al-Bīrūnī that one fragment is part of 1. So Hermelink and Saidan correctly identified this fragment.

Section 5 deals with a second fragment, which was identified by Saidan as part of the "Exquisite Problems" of Ibrāhīm ibn Sinān. I shall attempt to prove that this identification is correct by means of a passage in a work of Al-Sijzi,<sup>8</sup> in which Al-Sijzi refers to the "Exquisite Problems" of Ibrāhīm ibn Sinān. I give English translations of the reference and of the passage in the "Exquisite Problems" to which reference is made. These translations may also give the reader an impression of the contents of the "Exquisite Problems".

Section 6 consists of a brief discussion of the reasons why the third fragment probably is the above-mentioned work 3. of Al-Bīrūnī.

## 2. *The manuscript and the correct order of its leaves*

The first 324 leaves of the manuscript are numbered 1-326 in eastern Arabic numbers.<sup>9</sup> There are no leaves numbered 218 and 219, but there is no interrup-

8. On Al-Sijzi see GAS 5, pp. 329-334.

9. The manuscript has apparently been rebound again in recent times. Professor Toomer's photographs show the effects of a second rebinding, at the time that these were taken the leaves of the manuscript were in the following order: 1-262, 264, 266, 263, 265, 267-304, 308, 306, 307, 305, 309-313, 315, 314, 317, 316, 318-326, last leaf.

Thus on the photographs f. 262b appears next to f. 264a, f. 264b appears next to f. 265a, et cetera.

No effects of the second rebinding are visible on the film which the Oriental Public Library sent to Leiden in 1980; on this film f. 262b is next to f. 263a etc.

Somebody attempted to change the numbers 263, 264, 265, and 266 into 264, 265, 266, 267 respectively. I refer to the original numbers (these are still legible).

order of the leaves in the manuscript. Thus the printed text is not in the correct order in the *Rasā'il al-Bīrūnī* in "*Istikhrāj al-Awtār*" (the Extraction of Chords) and "*Ifrād al-Maqāl fī Amr al-Ẓulāl*" (the Exhaustive Treatise on Shadows) and in the *Rasā'il ibn Sīnān* in "*Kitāb fī Harakat al-Shams*" (Book on the Movements of the Sun) and "*Al-Handasa wa-'ilm al-Nujūm*" (Geometry and Astronomy). The parts of the manuscript that were printed as "*Istikhrāj al-Awtār*" and "*Al-Handasa wa-'ilm al-Nujūm*" contain fragments of three works which do not exist elsewhere. These can be identified as

1. "Treatise on the Solution and the Division of the (solar) Equation" (*Maqala fī'l-tahkīl wa'l-taqīṣ fī'l-ta'dīl*) by Al-Bīrūnī,
2. the "Exquisite Problems" (*Al-masā'il al-mukhtāra*) by Ibrāhīm ibn Sīnān,
3. "Treatise on (the fact) that the necessities of the infinite subdivisibility of magnitudes are related to the matter of the two lines which approach each other but do not meet in the distance" (*Maqāla fī amr al-awāsim tajazzu' al-maqādir ila lā nihaya qarība min amr al-khattayn alladhayn yaqrubān wa-lā yaltaqiyān fī'l-istib'ād*), a work by Al-Bīrūnī on parallels.

Most of what has been mentioned above was already described in 1960 in a remarkable article by Saidan.<sup>5</sup> Relying completely on the printed texts in the *Rasā'il al-Bīrūnī* and the *Rasā'il ibn Sīnān*, Saidan attempted to re-establish the correct order of the treatises. He correctly identified the fragments of 1. and 2., without, however, giving detailed evidence for the identification. The fragment of 3. was identified correctly by Saidan in 1973 and also by Bulgakov and Ahmedov in 1977.<sup>6</sup> It should be noted that the fragment of 1. was also identified correctly by Hermelink in 1956.<sup>7</sup> Unfortunately these results have not yet been incorporated in F. Sezgin's *Geschichte des Arabischen Schrifttums*.

Following the suggestion made by Saidan in his 1960 paper I have studied the manuscript Bankipore 2468. This paper contains the result of my research. It appears that the manuscript can be divided into five disconnected parts.

5. A. S. Saidan, "The *Rasā'il* of Bīrūnī and Ibn Sīnān, A Rearrangement", *Islamic Culture*, 34 (1960), 173-175.

6. A. S. Saidan, "The Trigonometry of al-Bīrūnī", *Al-Bīrūnī Commemoration Volume*, ed. Hakim Muhammed Saad (Karachi: Hamdard Academy, 1973), p. 690, and P. G. Bulgakov, A. A. Ahmedov, "Beruini i Al-Kindi o teore parallel'nykh" (in Russian), *Obščestvennye nauki i Uzbekistane* (1977), 30-36.

7. H. Hermelink, "Al-Bīrūnī. Lehrbriefe. Vier Abhandlungen aus der mathematisch-astronomischen Sammelhandschrift Bankipore Nr. 2468", *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* 54 (1956) 2

# Rearranging the Arabic Mathematical and Astronomical Manuscript Bankipore 2468

J. P. HOGENDIJK\*

## *Acknowledgements*

At the request of Dr J. J. Witkam, keeper of the Oriental manuscripts in the Library of the University of Leiden, the staff of the Oriental Public Library in Patna kindly sent a microfilm of MS Bankipore 2468. Professor C. J. Toomer, Providence, lent me his excellent photographs of the manuscript during my visit to Providence in 1981 which was financially supported by the Netherlands Organisation for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.). The Chester Beatty Library, Dublin, sent a microfilm of Arabic MS 3652 to Leiden, and Professor Sezgin, Frankfurt/Main showed me his copies of MS Istanbul, Resit 1191. Professor E. S. Kennedy and Dr. R. Lorch, Aleppo, Dr. H. J. M. Bos, and Dr. Krak, Utrecht and Professor G. Saliba, New York, made helpful suggestions. Miss S. M. McNab, Utrecht, made linguistic improvements. The support of the above-mentioned persons and institutions is gratefully acknowledged.

## 1. Introduction

The Arabic manuscript Bankipore 2468 (now 2519)<sup>1</sup> in the Khuda Bakhsh Oriental Public Library in Patna (India) consists of a valuable collection of over forty treatises by medieval Islamic mathematicians and astronomers. The greater part of the manuscript was written in 631-2 H./1234 A.D. in Mosul.

Somewhere in its history the manuscript fell apart and several leaves were lost. It was rebound in an incorrect order; as a consequence the leaves of several treatises of Al-Birūnī<sup>2</sup> (362 H./972 A.D. - 440 H./1048 A.D.) and Ibrāhīm ibn Sinān<sup>3</sup> (296 H./909 A.D. - 335 H./946 A.D.) are displaced.

The Osmania Oriental Publications Bureau in Hyderabad printed the disarranged parts of the manuscript in the *Rasā'il al-Birūnī* (1367 H./1948 A.D.)<sup>4</sup> and the *Rasā'il ibn Sinān* (same year),<sup>4</sup> following in most cases the incorrect

\*History of Math. Dept. Box 1900, Brown University Providence R. I. 02912, USA.

1. See Maulavi Abdal Hamid, *Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Library at Bankipore*, vol. 22, Arabic Math. Science (Patna, 1937), pp. 60-92.

2. On the life of Al-Birūnī see the article by E. S. Kennedy in DSB II, 147-158. The mathematical and astronomical works of Al-Birūnī have been listed in GAS 5, 375-383 and 6, 261-267, and D. J. Boilot, "L'œuvre d'al-Birūnī: Essai bibliographique", *Mélanges. Institut Dominicain d'Etudes Orientales du Caire*, 2 (1955), 161-256. Complete bibliographical references to GAS and DSB are in section 3.

3. On Ibrāhīm ibn Sinān see GAS 5, pp. 292-295 and 6, pp. 193-195.

4. Complete references are in section 3.

مجلة جديدة

تصدر مرتين في العام

## مجلة معهد المخطوطات العربية

- مجلة متخصصة نصف سنوية مُحكَّمة. تقدم البحوث الأصلية في ميدان المخطوطات العربية.
- همّ المجلة بنشر البحوث، والدراسات، والنصوص المحققة، وفهارس المخطوطات، ومراجعة الكتب، كما تعرّف بالتراث المخطوط.
- مواعيد صدور المجلة يونيه (حزيران) وديسمبر (كانون أول) من كل عام.
- قواعد النشر تطلب من رئيس التحرير.
- جميع المراسلات توجه باسم رئيس التحرير.
- ثمن العدد: نصف دينار كويتي، أو ما يعادلها من العملات الأخرى.
- الاشتراك السنوي: دينار كويتي أو ما يعادلها من العملات الأخرى.
- التسوان:

معهد المخطوطات العربية

ص.ب: ٢٦٨٩٧ الصفاة - الكويت

## *Bibliography*

- Ashkal, Naṣr b. "Abdallāh, "Risāla fī anna ashkal kallahu min al-dā'ira", MS Bankipore 2468, ff. 280r - 282r.
- Muhammad Dizer, "Dā'irat al-Mu'addal in the Kandilli Observatory", *Journal for the History of Arabic Science*, 1 (1977), 257-260 + 2 pages of plates.
- David A. King, "Al-Khalili's Qibla Table", *Journal of Near Eastern Studies*, 34 (1975), 81-122.
- Louis Jamin & David A. King, "Ibn al-Shātir's Saḍūq al-Yawāqit: An Astronomical Compendium", *Journal for the History of Arabic Science*, 1 (1977), 187-256.
- Richard Lorch, "Al-Khāzini's 'Sphere That Rotates by Itself'", *Journal for the History of Arabic Science*, 4 (1980), 289-329.
- Abū'l-Ḥasan al-Marrākushī, *Jāmi' al-mabādi' wa'l-ghāyāt*, second part, MS Paris Bibliothèque Nationale 2508 (formerly 1148).
- Jamil Ragep & E. S. Kennedy, "A Description of Zāhiriyya (Damascus) MS 4871: a Philosophical and Scientific Collection", *Journal for the History of Arabic Science*, 5 (1981), 85-108.
- Hugo Seemann & Th. Mittelberger, "Das kugelförmige Astrolab", *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin*, 8 (1925), 1-69.
- Peter Schmalz, *Zur Geschichte des Quadranten bei den Arabern*, (München, 1929).
- Fuat Sargin, *Geschichte des arabischen Schrifttums* (Leiden: E. J. Brill, 1974), vols. V and VI.
- Sevim Tekeli, "'Equatorial Armilla' of 'Iz al-Din b. Muhammad al-Wafai and 'Torquetum'", *Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Dergisi*, 18 (1962), 227-259.

circle that passes through the points *G* and *D*—circle *GHD*. We cut off from arc *HD* [an arc] equal to the difference between the two longitudes—arc *HT*. Through points *Z*, *T* we draw a circle that lies on the surface of the sphere—circle *LZTK*. From arc *ZT* in the direction of *TZL* we cut off [an arc] equal to the latitude of Mecca—arc *TM*. Through points *E*, *M* we draw arc *EMN*. Then we join point *N* and the intersection of lines *AB*, *GD*, which is point *S*, by the line *SN*. I say: *SN* is the straight line that passes through the foot of the *imām* and the *Ka'ba*.

*Proof:* Because the pole of the equator is point *Z* and points *G*, *D* are on the equator, arc *GHTD* in the semicircle of the equator; and because *HT* is the difference between the longitudes, semicircle *LZTK* [is the meridian of Mecca and] the *Ka'ba* is bisected by it. Point *M* is the zenith of Mecca and point *E* is the zenith for the town [مدينة]. So circle *EMN* is the circle passing through the azimuth of the *Ka'ba*, and the line *NS* is the line passing through the foot of the *imām* who leads the people in prayer and through the *Ka'ba*. These premises and these principles that we have mentioned in this treatise I have set forth in a treatise on the structure of the celestial spheres. If there is someone seeking the azimuth of the *qibla* at the place known as the equator line, then he does these operations with circle *GDE* and dispenses with circle *GHTD*, because the pole of the equator is then at the level of point *B* and the region has no latitude there [i.e. on the equator]. The remaining operations of it [the instrument] I portray in this diagram. God is beneficent to what is right.

The treatise is finished. Praise be to God, the Lord of the Universe, and His blessings be upon His Prophet Muḥammad and all his family! Copied in Baghdad in the year 557 from the exemplar of the *qāḍī* Ibn al-Murakḥḥim, which was poor. It should be compared with another transcription, God willing (he He exalted!). He is sufficient for me.



### 3. Translation

In the name of God, the Merciful, the Compassionate.

*The treatise of Najr b. 'Abdallāh the Geometer<sup>10</sup> on the Determination of the Azimuth of the Qibla.*

[This has been written] because necessity calls on people to build cities and mosques in them and also because the construction of the *mihrāb* needs knowledge of the azimuth on which the *mihrāb* must be constructed, since the purpose in constructing the *mihrāb* is that the *imām* face towards the Ka'ba - because the prayer of the *imām* is the prayer of those who pray behind him. Seeking this object by way of calculation is difficult. There came to me a method, easy and close to hand, by means of an instrument that takes the form of a hemisphere. I have already mentioned this method in another treatise. Whoever comes across that method should know that it is that, and if something [in that treatise] contradicts this treatise, it is because it was a long time ago and I do not remember it. So I did the treatise again, and I describe for you how to operate with this instrument, as follows.

A well-formed hemisphere is taken, as accurate as possible, and two semi-circles are drawn on it that intersect at right angles and pass over the convexity [of the sphere]. Then we go to an open place and take in it an even surface parallel to the horizon. On this surface a straight line is drawn, which is the meridian-line and conformable to it [i.e. is called the meridian-line and is in the same direction as the real meridian]. A line is also drawn at right angles to this line. Let the intersection be the point *S*.

This common section [belongs] to the intersection of the horizon-circle and the equator-circle. So if we want to determine the azimuth of the *qibla*, we draw on the even surface a circle whose centre is the intersection of the two straight lines previously mentioned, which [the intersection] is point *S*, and whose semidiameter is equal to the semidiameter of the circle that is the base of the hemisphere. Then we fit the hemisphere on this circle [so that] the common section [belongs] to the intersection of the two circles delineated on the hemisphere and the plane of the horizon-circle. I mean the even[surface] in which we drew the two lines at right angles. Then at the ends of the meridian-line and the ends of the equator-line we inscribe *A, B, C, D*, making point *A* the southern side, *B* the northern side, *C* the eastern side and *D* the western side. On the convexity of the sphere we mark point *E* at the intersection of the two arcs. Then from point *B* towards point *E* من ناحية نقطة ب إلى ع [i.e. *from point B towards point E*] we cut off [an arc] equal to the latitude of our region [بلد] - let this arc be *BZ*. We make point *Z* a pole and on the surface of the sphere we draw a

10. The translation *geometer* has been used instead of the more usual *engineer, architect*, since this meaning seems to be required here and can find support, for instance, in the usage of the translator of Eutocius (see *Journal for the History of Arabic Science*, 5 (1981), p. 168).

## بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

رسالة نصربن عبد الله المهندس في استخراج سميت القبلة فلان الضرورة تدعو<sup>١</sup> الناس إلى بناء المدن والمسجد<sup>٢</sup> فيها كذلك حاجتهم إلى المعرفة بالسمت الذي عنه يكون نصب المحراب ضرورياً<sup>٣</sup> وذلك ان الغرض في نصب المحراب هو ان يكون الامام وجهه نحو البيت الحرام فان صلاة الامام هو صلاة من يصلي وراءه وطلب هذا المعنى من طريق الحساب صعب وقد اتفق لي طريقة سهلة قريبة المأخذ تألة تتخذ شبه نصف<sup>٤</sup> كرة وكنت قبل هذا ذكرت هذه الطريقة < في > غير هذه الرسالة فمن تقع اليه تلك الطريقة فيجب ان [ ان ] يعلم أنها ذلك وان خالف شيء [ شبه ] هذه الرسالة فاني بعيد العهد لم اذكره فعملت الرسالة ثانياً وانا واصف لك العمل بهذه الآلة من هاهنا .

تتخذ نصف كرة حسنة التقدير احكم ما يمكن ونذار عليه نصفاً دائرتين تتقاطعان على زوايا قائمة وتحران بالحذبة ثم نعمل الى مكان مكشوف ونتخذ فيه سطحاً مستوياً موازياً اماثرة الافق ويخرج من ذلك السطح خط مستقيم يكون خط نصف النهار ومطابقاً له ويخرج فيه ايضاً خط يكون على هذا الخط على زوايا قائمة وليكن التقاطع نقطة م ويكون ذلك الفصل<sup>٥</sup> المشترك لتقاطع دائرة الافق ودائرة معدل النهار فاذا اردنا ان نستخرج سميت القبلة فانا ندبر<sup>٦</sup> في السطح المستوى دائرة يكون مركزها تقاطع الخططين المستقيمين اللذين تقدم ذكرهما التي هي نقطة م ويكون نصف قطرها مثل نصف دائرة التي هي قاعدة نصف الكرة ثم نطبق نصف الكرة على هذه الدائرة انطباقاً به يكون الفصل المشترك لتقاطع الدائرتين المحلوطين<sup>٧</sup> على نصف الكرة وسطح دائرة الافق اعني المستوى الذي اخرحنا فيه الخططين المستقيمين على زوايا قائمة ثم نكتب على طرفي خط نصف النهار وطرفي خط الاستواء آ ب ح د ونجعل نقطة آ ناحية الجنوب و ب ناحية الشمال و ج ناحية المشرق و د ناحية المغرب ونعلم على حذبة الكرة عند < ا > تقاطع القوسين نقطة هـ ثم نقفل من ناحية

- ١- يدعوا
- ٢- والمساجد
- ٣- ضرورة
- ٤- ونصف
- ٥- الفصل
- ٦- نريد
- ٧- المحلوطين

نقطة  $\bar{ب}$  الى مايلي نقطة  $\bar{هـ}$  مثل عرض بلدنا وليكن تلك القوس  $\bar{ب ز}$  ونحمل نقطة  $\bar{ر}$  قطعاً  
وبندبر في بسيط الكرة دائرة تمر بنقطتي  $\bar{ج د}$  وهي دائرة  $\bar{ج ح د}$  ونفصل من قوس  $\bar{ح د}$   
مثل الفصل ما بين الطولين وهي قوس  $\bar{ح ط}$  ونحير على نقطتي  $\bar{ز ط}$  دائرة تمر في بسيط  
الكرة وهي دائرة  $\bar{ل ر ط}$  ونفصل  $\bar{هـ}$  من قوس  $\bar{ر ط}$  الى مايلي  $\bar{ق ط ز ل}$  مثل عرض مكة  
وهي قوس  $\bar{ط م}$  ونحير على نقطتي  $\bar{هـ م}$  قوس  $\bar{هـ م ن}$  ثم نصلي بين نقطة  $\bar{ن}$  ونقاط  $\bar{خطي اب}$   
 $\bar{ح د}$  التي هي نقطة  $\bar{س}$  بخط  $\bar{س ن}$  فاقول  $\bar{س ن}$  هو الخط المستقيم الذي يمر بقدم الامام والكعبة.

برهانه لان قطب معدل النهار نقطة  $\bar{ز}$  ونقطتنا  $\bar{ق د}$  على معدل النهار يكون قوس  
 $\bar{ج ح ط د}$  نصف دائرة معدل النهار ولا  $\bar{ح ط}$  فضلي ما بين الطولين يكون نصف دائرة  
 $\bar{ل ر ط ك}$  نصف بها الكعبة ونقطة  $\bar{م}$  سمت رأس اهل مكة ونقطة  $\bar{هـ}$  سمت رأس اهل  
المدينة فدائرة  $\bar{هـ م ن}$  هي الدائرة المارة بسمت الكعبة ونقطتنا  $\bar{س}$  الخط المار (بقدم) الامام  
الذي يصلي بالناس وباليست وهذه المقدمات والاصول التي ذكرناها في هذه الرسالة قدمتها  
في رسالة في تركيب الافلاك فاما اذا كان الانسان الطالب لسمت القبلة في الموضع المعروف  
نخط الاستواء  $\bar{١١}$  فانه يعمل هذه الاعمال بدائرة  $\bar{ج د هـ}$  ويستغني عن دائرة  $\bar{ج ح ط د ل}$  لان  
قطب معدل النهار حينئذ يكون منزلة نقطة  $\bar{ب}$  وليس هناك للبلد عرض وبقي الاعمال منها  $\bar{١٢}$   
وصفته  $\bar{١٣}$  في هذا الشكل والله الموفق للصواب .

تمت الرسالة والحمد لله رب العالمين وصلواته على نبيه محمد وآله اجمعين نقله في  
سنة ٥٥٧ بغداد من خط القاضي ابن المرخم وكان مقيماً فليقابل بنسخ اخرى ان شاء الله  
تعالى وهو حسبي .

٨- ونفصل

٩ (مايل)  $\bar{هـ م}$  ما

١٠ ونقطه

١١ الاستواء

١٢ عدسا (ق)

١٣ وصنفته changed from



with projected circles was followed to find the *qibla* with the astrolabe-quadrant.<sup>9</sup> It is surprising that al-Wafāʿī did not adapt his *dāʿirat al-muʿaddal* to the purpose, for all that would be needed would be graduations on the semicircular sighting-vane and an extra quadrant that could stand upright on the horizon-circle.

Naṣr b. ʿAbdallāh says he has written before on the subject in a treatise, which seems to be lost, on *tarkīb al-aflāk*, probably one of the books on astronomy that follow Ptolemy's *Hypotheses*.

*Note added in proof.* Mr. J. P. Hogendijk tells me that the treatise on the circle as the origin of all plane geometrical figures is probably by al-Sijzī. For his reasoning see his article in this issue, §A 39. If this is correct, the tentative dating of Naṣr b. ʿAbdallāh in the first three sentences of this article must be ignored.

## 2. The Text

The text is taken from the only known MS, Damascus Zāhiriyya 4871, f. 83r. For a description of the whole codex see Ragep & Kennedy. From this article the transcription of "Ibn al-Murakkhkhim" in the colophon was taken. Angle brackets, < >, indicate additions; square brackets, [ ], words to be deleted; and round brackets, ( ), restorations from a physically damaged part of the MS. The apparatus gives the MS-reading when the text has been emended. *Hamzas* have been silently added, but several grammatical mistakes have been left. In the translation, which is as literal as possible, square brackets indicate words not in the text as given below.

9. Schmalz, pp. 61-62.

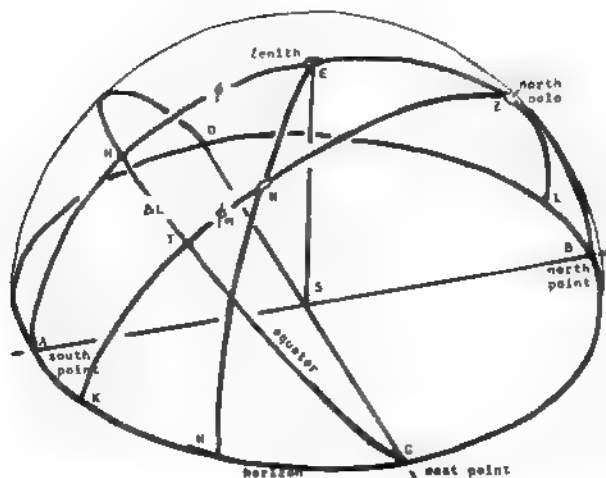


Fig. 1. The case represented here is for a place west of Mecca. The semicircle GED is omitted for clarity.

is known and a rule, fitting the sphere, for use when two of the circle's points are known. The rule must be graduated so that the latitudes and longitude-difference can be marked off. No indication is given about the nature of these instruments, but suitable compasses are described in the thirteenth-century *Libros del Saber*,<sup>5</sup> and a suitable rule is described by al-Marrākushī for use with his "solid sphere".<sup>6</sup>

Essentially the same procedure is given by 'Abd al-Rahmān al-Khāzinī in the fifteenth application of his "sphere that rotates by itself".<sup>7</sup> In this case the pole and equator-circle are already marked and the only extra mark made on the sphere is a dot at the position of Mecca; a rule is used to join this dot and the local zenith to find the azimuth of Mecca on the horizon-circle. Since the sphere is being used here purely as a "solid sphere", or *dhāt al-kursī*, further research may well reveal this determination of the *qibla* in other treatises on this instrument. Further, one of the uses of the spherical astrolabe, which was furnished with a horizontal co-ordinate-system, was to find the azimuth of one place with respect to another.<sup>8</sup> The equivalent procedure

5. Seemann & Mittelberger, p. 54.

6. Al-Marrākushī, f.15v, lines 13-16.

7. Lorch, pp. 314, 324.

8. Seemann & Mittelberger, p. 27.

# Nasr b. 'Abdallāh's Instrument for Finding the Qibla

RICHARD LORCH\*

## 1. Introduction

According to Sezgin (V, 314 and VI, 208),<sup>1</sup> Nasr b. 'Abdallāh, the author of the text given below, was called al-'Azīzī and wrote treatises on eclipses and on the circle as the origin of plane geometrical figures. For his date the only evidence appears to be the passage at the beginning of the latter treatise, where he says he has already written a book on the subject "for the library of the King al-Manṣūr" (*li-khizānat al-malik al-Manṣūr*).<sup>2</sup> The cataloguer of the manuscript confidently identifies this *al-Malik al-Manṣūr* as Mansūr 'Adūd al-Dawla, thus putting Nasr b. 'Abdallāh in the latter half of the fourth/tenth century. The instrument that the author describes here is one of the few that find the *qibla* (the direction of Mecca) geometrically. The *qibla* may be found with other instruments, such as the sinecal quadrant,<sup>3</sup> by following trigonometrical calculations; and many an instrument, such as the *dā'irat al-mu'addal*,<sup>4</sup> carry *mihrabs*, presumably found by calculation, on a horizontal circle.

Nasr b. 'Abdallāh's procedure is to draw the requisite diagram, which consists of arcs of great circles, directly on a hemisphere. This hemisphere, *ABGD*, which is bisected by each of the orthogonal circles *AEB* and *DEG*, is aligned so that *B* points towards North. If  $\phi$  represents the geographical latitude of the place in question,  $\Delta L$  the difference in longitude between the place and Mecca, and  $\phi_M$  the latitude of Mecca, the remaining steps may be summarized thus (see fig. 1):

*BZ* =  $\phi$ . *Z* is the north pole.

Draw equator *GHU* about pole *Z*.

*HT* =  $\Delta L$ .

Draw *LZTK*.

*TM* =  $\phi_M$ . *M* is position of Mecca.

Draw *EMN*. *SN* gives the direction of Mecca.

To make these constructions on a hemisphere one would require two instruments for drawing great circles: compasses for drawing the circle when the pole

\* Institute for the History of Arabic Science, Aleppo University. It is a pleasure to thank Dr. Saleh Omar, Col. Muḥammad 'Alī Khayyāta, and Mr. Muḥammad Kamāl, of this Institute, for help at various times with the Arabic text given in this article.

1. Here and elsewhere the references are to the bibliography at the end of the paper.

2. *Ashkādī* f. 280r.

3. King, pp. 111-115.

4. Dizer; Janin & King, p. 217 and plate 16, Tekeli.

17/16

نقطة : إحدى نقطتي

17/17

مذكورين : المذكورين // الآخرين : الآخرين

17/90

الآخر : الآخرين

17/20

أوليين : أوليين

21/22

جغرافيا : جغرافيا ، أو : جغرافيا

22/2

أما ما على الأرض : أما تعيين [ تقوم ؟ ] ما على الأرض

22/3 On the basis of the clearly observed distinction between *Kitāb* and *maqāla* in al-Bīrūnī's *Fihrist* and the reference to its subject here, the *maqāla* cited is to be identified with his - lost *Maqāla fī taḥḥīḥ al-ṭūl wa-l-'ard li-masākīn al-ma'mūr min al-'ard* (*Chron.*, p. XXXXI, I. -3).

22/4

مسرة تولي : مسرة تولي

22/6

منها : منها



I have not been able to find either of the two verbs in the dictionaries although their meanings appear understandable enough in their derivation from the commonly attested forms of the two roots: "to find gross/obscene", and "to examine, scrutinize".

14/3-7 I would suggest the following translation:

As for those who find it absurdly silly, they may dismiss it altogether and, in refuting its proponents, go to such lengths as to feign ignorance and to vent their anger at them. Such is the case with al-Farghānī. As for those who examine it critically, some believe that in the "melon-shaped" astrolabe, the sphere is imagined as flattened like a melon on one pole and split open toward the other, and others believe that this astrolabe and the aforementioned projection share no common features, but that it resembles those instruments which are designed for reading off ascendants and celestial altitudes, such as plane and other sundials.

14/8 "In relation to the opinions of these two groups mine represents a third," Al-Birūnī's attitude to the "melon-shaped" planisphere obviously had changed since *al-Istī'āb*; here, in the *Tastih*, he censures al-Farghānī for his babbling (*hadhayān*) and outright refusal even to consider its validity, while in his previous treatise, he had only mildly criticized his predecessor and even exonerated him on the basis of his and his peers' ignorance of Greek writings on conic sections and of the involved curves' exact construction. Moreover, the arguments al-Birūnī quotes here as those of the critics of the "melon-shaped" instrument, are (1) those of al-Farghānī as put forward in *al-Kamil*, and (2) his own as witness *al-Istī'āb* (see *Aufsätze* II 522-25). There arise the questions of why Abū l-Rayhān's opinion had shifted – was it simply that he was quoting from his memory here? – and of why he levelled such attacks at al-Farghānī.

14/8 ff. This paragraph is a close repetition of what he had announced in *al-Istī'āb* (*Aufsätze* II 524 center). Whether or not he ever composed the book he envisaged cannot be determined; he may have treated the subject in his *Takmil sināt al-tastih* (*Chron.*, p. XXXXVI, l. - 4), but certainly not in *Tahdhib Fuṣūl al-Farghānī* as Sa'īdan surmises in note 16.

14/13 تطيح المبطح : التطيح المبطح

14/14 (cf. *Chron* p. 359, l. 3 f.) الانقاد : الابعاد

14/20 المبطح : التطيح

14/21 التطيح : التطيح الاسطواني

17/11 and note 23: delete the reference and the note; al-Birūnī is here referring to pictorial representations of constellations, the outlines of which are to be determined by the locations of the respective stars.

13/11

جنوبی و شمالی : جنوبی و شمالی

13/14

الخطوط) : &gt; القطوع &lt;

13/22

قد نسيه : قد نسيه

13/23 f. Since writing *al-Ist'āb*, Abū l-Rayḥān evidently came to know more manuscripts of al-Farghānī's *Kāmil*, for in the earlier book he only mentioned al-Farghānī's attribution of the "melon-shaped" astrolabe to al-Kindī whereas here, on the basis of a different transmission of *al-Kāmil*, he also refers to Khālid b. 'Abd al-Malik al-Marwarrūdhī as a possible writer on the subject. In the absence of manuscript evidence for either al-Kindī or al-Marwarrūdhī, the respective merit of the two variants cannot at present be assessed. Al-Farghānī obviously belonged to the coterie of the Banū Mūsā (see Ibn abī Usaybī'a, *al-'Uyūn*, ed. Muller, Cairo 1299/1882, I 207, l. -6 ff.), who were engaged in a bitter feud with al-Kindī (*ibid.* and *Aufsätze* II 522-23); thus it would seem plausible that al-Farghānī also inveighed against him. Unfortunately, no corresponding title is transmitted among al-Kindī's writings so that it remains unknown whether he undertook a scholarly examination of this kind of astrolabe or simply based on it whatever astronomical operations and computations he performed. Of Khālid al-Marwarrūdhī's grandson, 'Umar b. Muḥammad, Muḥammad b. Ishāq al-Nadīm mentions a treatise on the plane *musatṭaḥ* astrolabe in *al-Fihrist* (tr. Dodge, New York 1970, vol. II, p. 656) while no such work by his grandfather is listed anywhere. It has to be borne in mind, however, that a rare and strange term like *mubattakh* might, by some copyist, have been "corrected" to *musatṭaḥ*. On the other hand, in the same *Fihrist*, there is a rather garbled reference to Khālid b. 'Abd al-Malik among the makers of astronomical instruments (*ibid.*, p. 671); thus, it cannot be dismissed out of hand that he left a tract on the "melon-shaped" astrolabe as well – unless it were assumed that either in some of the manuscripts al-Bīrūnī knew of al-Farghānī's *Kāmil*, or in the transmission of the *Tasṭiḥ* itself, the names 'Umar b. Muḥammad b. (Khālid) were dropped and so led to this confusion.

14/1

مبطنا : مبطن

14/1

ووجد الحسن كتابا : ووجدنا لحسن كتابا

Here al-Bīrūnī mentions Ḥabash al-Ḥāsib's monograph on the "melon-shaped" astrolabe, about which, as we have seen, he studied and corresponded with Abū Naṣr; regrettably, it is not known at which time exactly this took place.

14/2

اما مستحسن واما مستحسن



present treatise in terms which imply that it was the first work to be dedicated to Abū l-Ḥasan Khuwārizm-Shāh; together with his mention of exile, return and reception at court, this would seem to suggest that it was a *sadeh* festival soon after his return which offered him the opportunity to present, as it were, his credentials as a scholar. In al-Bīrūnī's time, *sadeh* was celebrated on 10 Bahmanmāh, which, according to the unintercalated Yazdagirdi calendar, placed it around 20 January. Since, as we have seen, al-Bīrūnī returned to Khwārezm between August 1003 and July 1004, the *sadeh* mentioned in the *Tasṭiḥ* can most probably be identified as either that of 20 January 1004 or that of 19 January 1005. Bringing tribute and gifts is not normally associated with the customs observed at *sadeh*, but rather with those of *navrūz* and *mih-rajān*; on the other hand, it may have formed part of the celebrations of all the ancient festivals. In the light of the *sadeh* traditions incorporated by Ferdowsi in the *Shāhnāmah* and also of the results of modern scholarship, al-Bīrūnī is evidently right in attributing great age and Sasanian back-ground to this festival even though its actual origin – supporting the sun and other forces of life against the harshness of winter – had been forgotten in the literary tradition.<sup>6</sup>

Given the similarity of subject-matter in the *Tasṭiḥ* and in the concluding section of *Chron.*, it has more than once been attempted to fix the date of the *Tasṭiḥ* on the basis of a comparison between the two texts. We have seen above that the treatise under discussion here can be dated rather precisely by means of such historical and biographical data as are contained in the text itself. If additional evidence were wanted, however, that *Chron.* preceded *Tasṭiḥ*, it would be furnished by the sentence with which he introduced, in *Chron.*, the chapter on plane projection of the celestial and terrestrial globes: he had not come across any discussion which he could adduce and use as a basis of his own treatment (*wa-lam ajid li-ahadīn qawlan fi dhālika fa-ahkiyahu*); instead, he was writing down what came to his mind and was asking the reader's forbearance. It would indeed be strange to assume that he had forgotten his own treatise on the subject and all the earlier books quoted there when he formulated that sentence. However, al-Bīrūnī's subsequent references, in *Chron.*, to his own *Kutāb al-Istī'āb* and to Abū Ḥāmid al-Šāghānī raise the question of whether he simply meant that there was no comprehensive survey at hand which he could follow or whether this section of *Chron.* as it exists today is the result of later editing and revising as al-Bīrūnī envisaged

6. On the feast of *sadeh*, Arabicized as *sadhag*, see Mary Boyce, *A History of Zoroastrianism*, Vol. I: *The Early Period*, Leiden/Cologne 1978 (*Handbuch der Orientalistik. Erste Abt.*, VIII. Bd., 1. Abt.), Lfg. 2, Heft 2A), p. 175 ff. (with refl.); numerous Arabic and Persian poems pay tribute to its observation in Islamic times.

(*Répertoire chronologique d'épigraphie arabe*, ed. Ét. Combe et al., Cairo 1931-75, vol. VI, 91 f., no. 2169). The author also adhered, in the addresses to his benefactors, to rules of *inshā'* which stipulated that dignitaries and princes not be called by their given names but by appropriate titles and honorifics. Thus, in the text of *al-Maḡālīd*, he refers to Abū l-'Abbās Marzubān b. Rustam b. Sharwīn merely as al-Isfahbadh Jiljilān Padashwārjarshāh and in *Chron.*, to Qābūs b. Wushmagīr as Shams al-Ma'ālī (*Birūnīnāmeh*, pp. 461, 1. 10. 462, 1. 13. 504, 1. 3; not all of Abū l-'Abbās' titles are used every time. *Chron.*, p. 20, s. v. Shams-alma'ālī). Most probably, the name(s) of the Khuwārizm-Shāh then reigning were included in the lost title of the *Tasth* as were those of the Isfahbadh in the heading of *al-Maḡālīd*. Al-Birūnī was not the only author among his contemporaries to use such a protocol of address to his dedicatee, as is shown, e.g., by Abū Mansūr Muwaffaq b. 'Alī al-Harawī in his *Ketāb l-abnīeh 'an haḡāyego l-advīeh* (photographic reproduction of the ms, Codex Vindobonensis A. F. 340, as vol. XXXI of *Codices selecti*, Graz 1972; see fol. 2v, ll. 5-6).

Abū l-Rayhān's reference to his long exile and final return to his homeland and to the warm welcome extended to him at the Khuwārizm-Shāh's court in the capital, i.e., al-Jurjāniya, provide valuable clues as to the date of composition of the *Tasth*. In *al-Taḥdīd*, he briefly reports on going into hiding from domestic troubles in Khuwārizm in 385/995 and on his eventual flight (ed. Bulgakov, *RJMA* 8, 1962, p. 110, ll. 7-11). Unfortunately, he did not leave us a similar account of his return, but from the record of his observations of two lunar eclipses, one at Jurjān on Sunday, 13 Shawwāl 393/15 August 1003, and the other in the Khwārezmian capital al-Jurjāniya on Wednesday, 14 Ramadān 394/5 July 1004, it may be gathered that he returned to Khwārezm during the eleven months between these two dates (*al-Qānun al-Mas'ūdi*, ed. Hyderabad, II 741, ll. 16-19). Even if this were doubted, al-Birūnī entered the service of the then Khuwārizm-Shāh, Abū l-Ḥasan 'Alī b. Ma'mūn well before the latter's death in 399/1009 since he named him in a list of his major benefactors between Qābūs b. Wushmagīr and Ma'mūn b. Ma'mūn Khuwārizm-Shāh (Yāqūt, *al-Irshād*, ed. Margoliouth, E. J. W. Gibb Memorial VI, 6, p. 312, l. 11 = ed. Cairo XVII 187, l. 5 f). In view of the fact that Abū l-Ḥasan 'Alī only came to power in 387/997, the author's claim to have grown up in the 'protecting shade of his kingship' cannot be taken literally, especially given al-Birūnī's close ties to the previous, dispossessed dynasty, the Āl-'Irāq, whose rule was ended by Abū 'Alī's father in 385/995. Only in so far as the Ma'mūnids had been governors of al-Jurjāniya for a long time before that date is Abū l-Rayhān's statement correct.<sup>7</sup> He alludes to his

7. On Khwārezmian history of this period see Clifford Edmund Bosworth in *EF*<sup>2</sup> IV 1665b-68b, s. v. Khwārazm-Shāhs, esp. p. 1666 (with ref.).

although Wiedemann and Frank more than sixty years ago thus established it on the basis of irrefutable textual evidence (*Aufsätze* II, 522. 524): al-Birūnī here alludes to *al-asturlāb al-mubattakh*, the "melon-shaped" planisphere in which the adjective refers to the shape of the rete, *al-ʿankabūt*, as it does in the other varieties, e. g., the *āsi*, *mutabbal*, *zawraqi*, *lawlahi*, etc. In *al-Tafhīm*, Abū l-Rayḥān himself derives the term from *biṣṭikh*, melon,<sup>5</sup> and as early as in *al-Isṭiʿāb*, he draws the parallel to a *tannūr*, a beehive-shaped oven, as al-Farghānī had done before him (*Aufsätze* II, 526. 529). In support of this reading, if it were needed, attention might be drawn to manuscript evidence such as that offered by Abū Saʿīd Ahmad b. Muḥammad b. ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī's autograph copy of Abū Jaʿfar Ahmad b. ʿAbdallāh's *Kitāb Fī ʿanʿat al-asturlāb al-mubattakh*.<sup>6</sup> Abū l-Rayḥān does use *tabṭikh* and *mubattakh* in a more general sense, that of 'flattened', in the title of his tract on projection, but in a way totally consonant with the rules of Arabic grammar. Judging by his usage in the *Fihrist*, which distinguishes between *kitāb* and *maqāla* according to length, it appears most likely that the title read *maqāla fī taslīḥ al-suwar wa-tabṭikh al-kuwar*, "Discourse on the plane projection of constellations and the 'melon-shape' projection of countries."

In addressing his dedicatee, al-Birūnī adopts a style closely resembling that which the Khuwārizm-Shāh Abū l-ʿAbbās Ma'mūn b. Ma'mūn employed in his foundation document of 401/1011; there the *shah* is titled *al-amir al-sayyid al-malik al-ʿadīl abū l-ʿAbbās Ma'mūn b. Ma'mūn Khuwārizm-Shāh*

5. Ed. and tr. R. Ramsay Wright as *The Book of Instruction* ..., p. arab. facing p. 198, l. 8 f.:

ومن صنيع يسمى مطباً منطبقاً يروجه ليست مستديرة لكنها كالطبخ بمرطحة

In the Persian version, *ka-l-biṣṭikh* is paralleled by *tun kharbosh* (ed. Jalāl Rumāʿi, Tehran 1316-18 h. sh., p. 297, l. 6). It will be noted that the meaning of 'flattening' is contained in the term *mubattakh*; thus, a change to *mubattakh* would be erroneous.

6. Paris, Bibliothèque nationale, ms arabe (de Slane) 2457 XXX (fol. 141a-150b, see Baron McCuekin de Slane, *Catalogue des manuscrits arabes*, Paris 1883-95 [Bibliothèque nationale. Département des manuscrits], pp. 430b-34a, esp. 432b, no. 3a. Sezgin's remark that this part of al-Sijzī's famous collection was a copy from his manuscript [CAS VI 188] is not correct since the bulk of the manuscript is obviously in one hand.) In spite of the fact that al-Sijzī calls the author simply Abū Jaʿfar Ahmad b. ʿAbdallāh, there can be no doubt that it is Ḥabash al-Ḥasib who is meant here. (In the same manuscript, al-Sijzī calls Abū Jaʿfar al-Khāzin only Abū Jaʿfar Muḥammad b. al-Ḥusayn, see CAS V 305-07, esp. 306 f., nos. 1-3, and VI 189, note 1.) Ḥabash's treatise on the 'melon-shaped' astrolabe was well known and quoted by al-Sijzī himself in *Kitāb Fī ʿamal al-asturlāb* where he refrained from a discussion of its construction because of Ḥabash's exhaustive treatment in his book (Istanbul, Topkapı Sarayı, MS Ahmet III 3342, fol. 150b, ll. 3-7; thanks go to the direction of Topkapı Sarayı Müzesi for permission to consult the manuscript). Abū Naṣr b. ʿIrāq offers a proof for one of Ḥabash's constructions in it to al-Birūnī in *Risāla fī mayāzāt darūdʿir al-sumūʿ fī l-asturlāb* (MS Bankipore 2468, fol. 81a, 14 f. = ed. Hyderabad, in *Rasāʾid Abi Naṣr ... ilā l-Birūnī*, Hyderabad 1368/1948, p. 12, l. 4 where the manuscript's clear *al-mubattakh* was "unaccountably changed to *al-musattakh*). Finally, al-Birūnī himself mentions Ḥabash's book in *-Tasfīḥ* (see below). Richard P. Lorch's generous help in providing copies of the Paris and Bankipore manuscripts is gratefully acknowledged.

*Kitāb Maqālid 'ilm al-hay'a*<sup>1</sup> and in *Kitāb fi isti'āb al-wujūh al-mumkina fi san'at al-asturlāh*<sup>2</sup>, to name just two of his works which are not too far removed in date from the treatise under discussion here.<sup>3</sup> Although neither manuscript of it so far known to exist<sup>4</sup> preserves such a title, it can safely be assumed to have once existed and to have closely resembled that of one or the other of the two aforementioned books. The two verses which introduce the Leiden manuscript appear suitable enough for a festive occasion such as the 'night of sadeh' to be considered authentic.

The title of the treatise as al-Birūnī entered it into his *Fihrist* (*Chron.*, p. XXXIII. 1. 4), < *Maqala* > *Fi tastih al-suwar wa-tabtkh al-kuwar*, has to this day been a source of doubt concerning the correct reading of *tabtkh*

*List of abbreviations:*

Ahlwardt A., Wilhelm, *Die Handschriften-Verzeichnisse der Königlichen Bibliothek zu Berlin. Siebsbahn-ter Band. Verzeichnis der arabischen Handschriften*, 10 vols (Berlin, 1887-99).

Aufsätze Wiedemann, Eilhard *Aufsätze zur arabischen Wissenschaftsgeschichte*, 2 vols (Hildesheim, New York, 1970) (Collection VI/1-2)

*Birūnīnāmah* Qorbānī, Abū l-Qasem, *Birūnīnāmah. taḥqīq dar āstāra-riāzi-yā Ostād Abū Rayḥān-e Birūnī* (Tehran s.d. [1353 h sh.]). Selsele-ye (Enteshārāt-e Anjoman-e Āstān-e Melli, 107)

*Chron.* Eduard Sachau, *Chronologie orientalisches Völker von Al-Birūnī* Leipzig, 1876-78.)

CAS Sezgin, Fuat, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, 7 vols. to date (Leiden, 1867 ff.)

الحمد لله حتى حمده وصلواته على محمد وآله وأصحابه من بعد وسلم تسليماً كثيراً وبعد فهذا كتاب محمد بن أحمد البروني في اسيدب الوجوه المكمه في صفة الأسطرلاب الأنفس الصافية دوت براع و شتباق الى تصور الموجودات ..

The dedication of the book, to Abū Sahl al-Masūhī, is incorporated in the text itself and follows a few lines later (see Ahlwardt V 231, no. 5796, MS Sprenger 1869).

بسملة . كتاب مقاليد علم اهتة ما يحدث في مطلع بسيط الكثرة عمله أبو الريحان محمد بن أحمد البروني للإسجد الخليليان عشوار سرشاء أبي اللباس مردبان بن رسم بن شروين مولى أمير المؤمنين جلت القلوب على حبيب من أحسن إليها ..

It will be noted that the dedicatee is named in the heading itself while a proper *hamdala* is missing (*Birūnīnāmah*, p. 461, 1. 6 ff.).

3. On the basis of the quotation in *Chron.*, p. 357, 1. 20, *al-Isi'āb* has, following Sachau, been dated before 390/1000, the year he undoubtedly established for the composition of *Chron.* (ibid p. XXIV f.). Since, in its turn, *al-Maqālid* is quoted in *al-Isi'āb*, the sequence of the three works appears clear. But even without relying on *al-Isi'āb*, it can be made plausible that *al-Maqālid* preceded *Chron.* as witness the author's testimony, in *Chron.*, to his personal acquaintance with the Ishāb-badh Abū l-'Abbās, the dedicatee of *al-Maqālid* (*Chron.*, p. 209, 1. 7). As for a *terminus post quem*, al-Birūnī's references in *al-Maqālid* to a previous dedication of a book to Shams al-Ma'ālī Qābūḍ (i. e., of *al-Tajrid*) and to his sojourn in al-Rayy evidently rule out the possibility that it was written before 383/995 when al-Birūnī presumably left his homeland Khwarezm to go into exile (see *Chron.*, p. 10, 1. 8 f.; *Birūnīnāmah*, pp. 462, 1. 2-497, 1. 7-501, 1. 10). *Dictionary of Scientific Biography* II 147b-158a, s. v. al-Birūnī [E.S. Kennedy], in her forthcoming study of *al-Maqālid*, Marie Thérèse Debarnot will discuss its date in detail. If the dating of *al-Isi'āb* is not to be questioned, it was composed in the span of the same five years, 385-90, as *al-Maqālid* (this writer harbors some doubt as to whether or not the reference to *al-Isi'āb* in *Chron.* might not be a later interpolation).

4. See CAS V 381, no. 10, and VI 272, no. 19; unfortunately, the study by Dānāseresht which Sezgin mentions has not been accessible to me. Sa'idān's edition (University of Jordan, Amman, *Durūṣāt al-ʿulūm al-fabʿiyya* IV, 1 [1977], pp. 7-22) is based on the Leiden manuscript alone. For a study of the corresponding section in *Chron.*, see *Birūnīnāmah*, pp. 249-67.

Here I am who grew up in the protecting shade of his kingship and was, after long exile, drawn to the pearl of his realm; in his august assembly—may God the most high increase it in excellence and eminence—I obtained of intimate company and friendliness, without title or merit, what made me surpass my peers and equals and what brought me near my goal and perfection. It is the duty of him who has been clothed in such garments to devote himself exclusively to the service of his patron and lord of his benefactions, secretly and openly, and to lavish the utmost of his ability and the extreme of his endeavor to render the dues of gratitude, even though his patron can dispense with them, but choosing what is preferable and holding fast to what is most suitable, by the way of reason.

The night of Sadhaq is one of the noble nights and magnificent feasts which the Khosroes held in veneration and during which they revived the customs of the ancient kings; on these and similar occasions the little man brings gifts to the great man, the one who is commanded propitiates the commander by demonstrating the sense of worship concealed in his heart. If it were possible, with body and soul, to win the grace of the august assembly, this would be of little moment in view of the incumbent duty, but the service rendered by scholarship is nobler than others and more exalted than all the rest; in this book I have thrown open the door of service through scholarship and lifted its veils; I have thereby smoothed the paths I will fittingly travel in whatever I take up as long as I live, donning the cloak of this noble service and seeking shelter under its shading protection; God is the giver of success and succor for that!

### Commentary\*

Unlike many of his contemporaries or later Islamic authors, Abū l-Rayhān al-Bīrūnī did not usually include his own name or the title of the work he was writing in its introduction; instead, he often prefixed a brief separate title to the texts proper which contained such bibliographical information and the customary opening invocations. This was the style he adopted in his

\* Warm thanks go to Edward S. Kennedy for suggesting that I undertake the foregoing translation as a supplement to Len Berggren's comprehensive study of the bulk of the text. I appreciate this opportunity for entering—admittedly only on the outlying reaches—hitherto unknown territory. I would also like to express my thanks to my colleagues at IHAS for lively and productive discussions and my appreciation of the research facilities found there. While preparing the notes presented here, I consulted Berggren's study, Suter's translation (in *Beiträge zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern, Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin*, Heft 4, Erlangen 1922, pp. 79-93) and Suter's and Wiedemann's "Über al-Bīrūnī und seine Schriften" (*Aufsätze* II 474-515) in addition to the sources quoted below.



*Al-Birūnī's Maqāla Fī taṣṭiḥ al-ṣuwar wa-tabṭīkh al-kuwar.*  
*A translation of the preface with notes and commentary*

LUTZ RICHTER-BERNBURG\*

**Translation of the Preface**

By most excellent rule and mightiest victory,  
By safest augury and most joyful circumstance;  
By superlative bliss and most powerful kingship,  
By felicitous duration and most cherished gift!

Gratitude for favors is a duty incumbent upon minds and intelligences without premeditation, and thereby the recipient of favors deserves the merit of increased benefaction. Thus it behooves me, at all times and in every situation, to illuminate the sign-posts of praise and encomium and to renew the ceremony of thanksgiving and invocation. All subjects have customs – in keeping them they uphold the rights of their masters and through them they express their convictions at their feasts and at the times of their joy and mirth, according to their situation and rank. And His Majesty, the commander, the lord, the just king, the patron of benefactions, the Khuwārizm-Shāh – may God the most high prolong his life in power and excellence and make last his might and eminence, may He give victory to his banner and standard, guard his kingdom and magnificence, support his authority and strengthen his rule and majesty, honor his grandsons and give power to his associates, may He subdue his envious and forsake his enemies – is the crown of kings in their entirety, whose days are the epoch of all days and whose presence is the origin of sublime and glorious qualities, the source of praiseworthy deeds and exploits, the refuge from the ruin of men from all quarters of the earth, with the wholesomeness of safety they have tasted there, the sweetness of justice, the loftiness of aspiration, overflowing generosity toward all, grace encompassing far and close, intimate company with savants and sages, their lodging in houses, their treatment with abundant generosity above merit and their rise from the depths to the clouds in the sky – may God guard his noble presence and preserve his inviolable, august threshold with His grace and boundless generosity!

\*Seminar für Arabistik der Universität, Göttingen West Germany; 1980-81 - ITHAS, Aleppo.

## البيروني والمصورات المستوية للكرة

ج. ل. برغون

في اواخر القرن الرابع للهجرة كتب أبو الريحان البيروني « كتاب تسطيح الصور وتبطيح الكور » يصف فيه بعض التطبيقات الجديدة لتصوير الكرة على السطح المستوي المكتشف منذ كتب بطليموس « الجغرافيا » قبل عشرة قرون خلت . وفي عام ١٩٢٢ نشر ه . سوتر ترجمة ألمانية لكتاب البيروني آنف الذكر مع تعليق موجز ، ثم بعد خمسة وخمسين عاماً نشر أ . سعيدان النص العربي محققاً معتمداً مخطوطة لايدن ١٠٦٨ رقم ١٥ . إضافة إلى ذلك هناك ترجمة روسية وأخرى أذربكية كما يوجد ملخص ودراسة فارسية أشار إليها جميعاً ف. سزكين . إن أغلبية المادة العلمية في كتاب تسطيح الصور ظهرت كذلك في آخر كتاب البيروني « الآثار الباقية من القرون الخالية » وقد شكل هذا مصدراً أفاد منه M. Fiorini في دراسته التاريخية القيمة عن تاريخ علم الخرائط والمصورات المبكر في أوروبا .

برغم كل هذه الأعمال لا نعرف لكتاب تسطيح الصور دراسة كاملة لذا توخينا في بحثنا تلافي هذه الثغرة ، وقدمنا فيه ثبأً وترجمة انكليزية لكامل الرسالة مهملين صفحة الاحداه الى خوارزمشاه الذي تكلمنا عنه فيما بعد ( انظر مقالنا بالانكليزية ) . نبدأ بملخصة وجيزة عن رسالة البيروني ، ونرجس القارئ في ترجمتنا الى نص سعيدان مشيرين الى رقم الصفحة ثم السطر .

### ١ - ملخص

١٠ : ٦ - ١٠ : ٢٩ . يستعرض البيروني الفائدة والمنفعة من معرفة صور الكواكب وهيئتها في علم الفلك وفي التنجيم وفي علم المناخ والزراعة ، ومن معرفة وضع الأشياء في سطح الأرض ومسامحة مواضع بعضها لبعض من أجل الرحالة والمسافرين والمصلين والحملات العسكرية .

١١ : ١١ - ١ : ١١ . الكتب هي الدليل المؤلف لمريدي معرفة هيئة الكواكب وأشكالها ، لكن عند تواتر النسخ وكثرة النقل لا تبقى الصور المصورة في تلك الكتب مضبوطة على حالها بل يصيبها كثير من الخلل والتشويه .

١١ : ١١ - ١١ : ١٧ . يمكن نقل صورة الكواكب الى الكرة بضبط واحكام إلا أن العمل في الكرة الصغيرة صعب في حين ان انتقال الكرة الكبيرة أو حملها من مكانها صعب كذلك .

١١ : ١٨ - ١٣ : ٣ . أما إذا نقلت المصورات في السطوح الكروية الى سطح مستوي فإن من السهل انتقالها لكن من الصعب محاكاتها . يصف البيروني ما جاء في ذلك عند ماريونوس ، بحسب ما رواه بطليموس ، وعند البتاني في سمت القبلة ناقداً لإيهما بعدم الدقة وقلة الضبط .

١٣ : ٤ - ١٥ : ١٥ . يستعرض البيروني ما كتب في هذا المجال مناقشاً طرق الاسقاط المخروطي والاسقاط المبطخ عند الكندي أو المروزي والاسقاط الاسطواني والاسقاط اللارياضي عند الصوفي ( لمزيد من التفصيل انظر مقالنا بالانكليزية Sec-4 ) . نظراً للنقص في تلك الاسقاطات جميعاً « وجب علينا ان نختار لها حيلة تقرب بها الأمر » بين السطح المستوي وبين السطح الكروي ، ومع ذلك فإن امتناع وجود النسبة المنطقية بين الخط المستقيم وبين المنحني يحول بيننا وبين التصوير المطابق للأصل على نحو كامل .

١٥ : ١٦ - ١٨ : ٥ . يصف البيروني طريقته الأولى في التصوير كالتالي ( انظر مقالنا بالانكليزية Fig. 1 ) : لندع القطرين  $AG$  و  $BD$  يربعان الدائرة  $E$  ولنقسم كل ربع من أرباع الدائرة الأربعة الى ٩٠ جزءاً متساوياً ولنفعل ذلك أيضاً في أنصاف قطريها الأربعة . فإذا كان  $AH$  يمثل جزءاً واحداً من أجزاء  $AE$  التسعين فإن القوس الدائرية الواصلة بين  $B$  و  $H$  و  $D$  تمثل نصف دائرة الطول . كذلك إذا كان كل من القوسين  $AM$  و  $GS$  يمثل جزءاً واحداً من أجزاء محيط الدائرة التسعين و  $EN$  جزءاً واحداً من أجزاء نصف القطر التسعين فإن القوس الدائرية الواصلة بين  $S$  و  $N$  و  $M$  تمثل نصف دائرة العرض . وهكذا تمثل باقي أنصاف دوائر الطول ودوائر العرض . ثم يقدم مثالين على كيفية تصوير كوكب معلوم الإحداثيات في هذه الخريطة . ويرشد القارئ الى تحضير خريطة أخرى لنصف الكرة الآخر ، ويداه على كيفية تولين الخريطين .

١٨ : ٦ - ١٩ : ٢٢ . هنا يشرح البيروني للصناع الذين يفضلون الحساب على طرق الانشاء الهندسي كيفية حساب أنصاف أقطار دوائر الطول ، وأبعاد مراكزها عن E مركز الدائرة المعلومة ، وما يسميه هو المجاز . وهي على التوالي ZT ، ZE ، والقوس AH في الشكلين (Figs. 2, 3) ( من أجل دوائر الطول ) . كما يشرح كيفية حساب EZ و ZT بطريقة مكافئة في تقويم العلاقة :  $TE = 2 ZT + (8100/TE)$  والعلاقة :  $EZ = (8100/2 TE) - TE/2 = EZ$  أما حساب القوس AH فيكون بطريقة مكافئة في تقويم العبارة الجبرية : قوس جب  $(40^\circ \cdot ZH \cdot 90/TZ)$  . وتقاس AR باتجاه B عندما تكون Z خارج الدائرة المعلومة (Fig.2) وباتجاه D عندما تكون Z في داخلها (Fig.3) .

١٩ : ٢٣ - ٢٠ : ٢٠ . ويحسب البيروني هنا الكميات نفسها كما وردت أعلاه من أجل دوائر العرض (Fig. 4) . لحساب ZT يحسب البيروني أولاً :  $SE = (3/2) \sin \widehat{AM}$  عندئذ  $TS = SE - TE$  ، ومن ثم  $SZ + ZT = MS^2/TS$  ( حيث  $MS = 3/2 \sin \widehat{DM}$  ) . وأخيراً يحسب TZ من العلاقة المحققة :  $TZ = TS/2 + (SZ + TZ)/2$  عندئذ تكون المسافة بين المركزين :  $EZ = ET + TZ$  . أما حسابه للمجاز  $\widehat{HD}$  من أجل دوائر العرض فبنفس طريقة حسابه للمجاز  $\widehat{AH}$  من أجل دوائر الطول . ثم يتحتم هذا الباب مبيناً أن مراكز دوائر العرض تمتد دائماً الى خارج الدائرة المعلومة وذلك بتبينه أن الوتر DM أعظم من DT : مما يتحتم أنه لا يمكن لدائرة مركزها في D أن تمر من M و T معاً كما أنه لا يمكن أيضاً لدائرة يقع مركزها بين D و E أن تمر من M و T .

٢١ : ١ - ٢١ : ٢١ . طريقة ثانية لتصوير السطوح الكروية على السطح المستوي تحصل عندما يكون البعد بين كوكبين ثابتين في الكرة هو نفس البعد بين صورتيهما في السطح المستوي ويكون بعد أي كوكب ثالث في الكرة عن الكوكبين الثابتين فيها بعداً واحداً وهو نفس بعد صورته في السطح المستوي عن صورتيهما فيه . تقاس الأبعاد في الكرة بحلقة من حلق الكرة العظام وتقاس في السطح المستوي بمسطرة مقسمة الى ١٨٠ جزءاً .

٢١ : ١٢ - ٢١ : ١٧ . طريقة ثالثة وهي أن يستعمل الطلاء على الكرة في مواضع الكواكب ومن ثم تدحرج الكرة بحركة دورانية على السطح المستوي المقصود التصوير عليه على طول اللوثر الكبرى مارة بنقطة ثابتة في الكرة ، وهكذا تنقل صور الكواكب على السطح المستوي .

٢١ : ١٨ - ٢٢ : ١٠ . يوصي البيروني القارئ بالرجوع الى جداول الكواكب الثابتة والى كتاب « الجغرافيا » للحصول على المعلومات التي يحتاجها في كل من صورة الكواكب وصورة الأرض . والقارئ الذي تعوزه مثل هذه المعلومات ولا يجدها في الكتب يحتاج الى إيجادها بنفسه كأن يستعمل ذات الحلق وغيرها من الآلات الراصدة المهياة لذلك وأن يشيع الطريق المنهجية في تحديد أطوال الأماكن وعروضها بما يتطلب عمراً مديداً وتقوذاً واسعاً في أرجاء المعمورة وهذا متعذر لذا يجب الاقتصار على معرفة أعمال الأوائل وتصحيحها قدر المستطاع .

٢٢ : ١٠ - ٢٢ : ١٥ . خاتمة الرسالة وفيها تحذير القارئ من الطلب المفرط في بلوغ الكل ، ثم دعاء الختام .

## ٢ - بعض الشرح والتطبيق

العنوان ... وتبليغ الكور . « يقترح فيديمان وفرانك أن نقرأ «تبليغ» بدلاً من «تبليغ» ، وبذلكي أنهما اعتماداً مرجعاً الأسطرولاب المبطخ الذي ورد ذكره في الرسالة . لكن لا يوجد دليل نصي يفيد بهذه القراءة لذا نفضل أن نقرأ كما قرأه سعيدان تماماً كما ينبغي أي «تبليغ» .

١٠ : ٩ هيئة الأفلاك - الأفلاك هي الكرات السماوية الثماني المتحدة المركز التي تحتوي الكواكب السيارة السبعة والكواكب الثابتة ، مع الأرض في المركز .

١٠ : ١٦ - ١٧ في المواليد وتحاولها ، وتحاول مني العالم . يشرح البيروني هذه الحملة في « كتاب التفهيم لأوائل صناعة التنجيم » حيث يكتب : ١ - السنة هي عودة الشمس الى المكان الذي كانت فيه في البدء . ٢ - سنة العالم هي عودة الشمس الى أول الحمل . ٣ - سنة المواليد هي عودة الشمس الى موضعها في زمن الولادة . ويخلص الى القول : « ويحتاج الى معرفة ذلك ليستخرج به الطالع فيكون طالع تحويل تلك السنة » .

١١ : ٤ في « كتاب التفهيم » يعرف البيروني فوه التنجيم بأنه شروق الشمس : ويشرح في « الآثار الباقية » النوء بأنه كذلك شروق ( طلوع ) المتزلة ( متزلة القمر ) ويسمى تأثير الطلوع بارحاً بينما يسمى تأثير السقوط ( الغروب ) نوعاً أيضاً . وجمع فوه أنواع . في مكان آخر من « الآثار الباقية » يشير البيروني الى كافة الحوادث السنوية المتعاقبة وكذلك

إلى الخاصة الارصادية وغيرها من خواص الأيام المفردة التي علمتهم ( اليونانيين والسوريين ) إياها التجربة والخبرة عبر القرون الطويلة ، وهم يسمونها افواء وبوارح . كما يشير إلى رأي أول بادر به ثابت بن قرة وهو أن الأنواء تحدث في يوم واحد هو نفس اليوم في كل مكان ومن ثم لا يمكن اتصالها بشرق النجوم ( الشمسي ) أو بأفولها .

١٢ : ١ عن مارينوس . يشير سعيدان إلى أن النص العربي في الأصل يقرأ « فاريوس » لكن تعديله إلى « مارينوس » أكيد ، ( أما قراءة سوتر له « ابارقوس » فهي خطأ ) ذلك على ضوء نص بطليموس الذي نسب التطبيق فعلاً إلى مارينوس .

١٢ : ٢ - ٥ نقرأ في طبعة سعيدان : من تخطيط خطوط موازية لخط الاعتدال واقامتها مقام دوائر العرض ، أعني أفلاك أنصاف النهار ، وتخطيط خطوط موازية لخط نصف النهار ( في الأصل لخط الاعتدال ) واقامتها مقام دوائر الطول ، أعني المدارات الموازية لمعدل النهار . حيث يوضح سعيدان في الحاشية ( ١٠ ) أنه استبدل في النص عبارة « لخط الاعتدال » بعبارة « لخط نصف النهار » ؛ لكن حتى بعد تصحيح سعيدان لا يمكن أن يكون هذا ما كتبه البيروني إذ لا يستقيم به المعنى . ولكن إذا أخذنا بتصحيح سعيدان وافترضنا أن عين الناسخ بدلت مكاني الجملتين التفسيريتين المتبدلتين بلفظة « أعني » في السطرين ٣ و ٤ عندها يستقيم المعنى . وبرغم ذلك هناك مجال لتعديلات أخرى ممكنة .

١٢ : ٦ - ٨ لتجنب افتراض أن النص محرف في هذه الأسطر علينا أن نفهم الطول الكلي بأنه مجمل طول الخريطة من الشرق إلى الغرب ، والعروض بأنها الخطوط التي تقيس عرض الخريطة المستطيلة الشكل من الشمال إلى الجنوب .

١٢ : ١٨ - ١٩ فاستخرج به حيثن مقدار بعد سمته . ترجم سوتر هذه العبارة كالآتي :  
( auch noch die Entfernung Von Mekka bis zum Beobachtungsort )  
( إلى جانب ذلك أيضاً البعد من مكة إلى مركز الرصد ) . وهذا خطأ نظراً لكونه لا ينطبق مع ما قلعه البتاني ولا يعبر عما أراده البيروني هنا .

١٣ : ٧ مجسمات ناقصة . إن ترجمة سوتر وشرحه ممكنان .

« Unvollkommener Körper ( d. h. deren Grundflächen nicht Kegelchnitte, sondern unclassifizierte Kurven sind ) »

( جسم غير كامل، أي أن الأسطح الأساسية ليست مقطوعاً محروطة بل هي بلا شك متحنيات غير منتظمة ). فمن الصعب التأكد مما قصده البيروني بلفظة « ناقصة » خاصة وأن العبارة لا يتكرر ورودها كما أن أحد استعمالها هو في وصف « القطع الناقص » . وهكذا إذا فليس مقدورنا التأكد من أي الاسقاطات اعتمد البيروني هنا .

١٣ : ٢٣ - ١٤ : ١ أسطرلاباً مبطحاً . فضلنا مع سوتر هذه القراءة على تلك التي اختارها سعيدان « مبطحاً » . إلا أن سوتر لم يذكر أن البيروني استعمل هذا اللفظ بالذات في « كتاب التصحيح » . ومنه ( الأسطرلاب ) صنف يسمى مبطحاً مقنطراته ومنطقة بروجيه ليست مستديرة لكنها كالبطيخ مفرطحة .

١٤ : ١ إن تبديل سعيدان لعبارة ووجد الحسن في الأصل عبارة « ووجدنا له » يبدو لا مبرر له .

١٤ : ١ - ٢ وأصحاب هذه الصناعة فيه فريقان : إما مستمجن وإما مستمجن إياه . قرأ سوتر اللفظتين كالتالي : « مستمجن ومستمجن » واعتبرهما تشيران إلى نموذجين للأسطرلاب لأنه فهم معنى جنر الكلمة ( المجرى الثلاثي ) بجن بأنه « غلظ وصلب » مشيراً إلى أنه استناداً إلى المعاجم والقواميس ليس لهذا الجذر صيغة عاشر ( أوزان المزيد ) . أما نحن فنفضل أن نأخذ معنى فعل بجن « هزى » ونحذف ، وبذلك نقول إن هاتين اللفظتين تشيران إلى موقف كل من الفريقين المذكورين .

١٤ : ١٢ تسطح المبطح . فضلنا هنا قراءة سوتر « مبطح » على قراءة سعيدان « مبطح » وذلك لاعتراض البيروني على هذا الاسقاط لأنه يقطع الدائرة الكسوفية ( تلك البروج ) إلى نصفين ، وهذا الاعتراض يلائم كل الملازمة الأسطرلاب ذا الشكل البطيخي كما وصفه فيديمان وفرانك .

١٤ : ١٣ لاتساع الأبعاد . باستبدالنا لفظة « انقاد » في النص المطبوع بلفظة « أبعاد » تبيننا اقتراحاً قدمه لوتس ريشتر - برغورغ .

١٤ : ١٩ الأسطرلاب المبطح . نظراً للملاحظة البيروني فيما تقدم حول القرعاني والأسطرلاب ذي الشكل البطيخي فنفضل هنا قراءة سوتر « المبطح » على قراءة سعيدان « المبطح » .

١٦ : ٤ نطلب . في أغلب الأحيان كنا نقرأ الأفعال بصيغة جمع المتكلم ، ونرى ذلك أفضل من قراءتها بصيغة المفرد المخاطب أو المبني للمجهول .

١٧ : ٥ وهو مائة وسبعة درجة . أوردها سعيدان بين حاصرتين أي أنها إضافة من عند الناسخ ، وهذا خطأ في جميع الأحوال ، والقراءة الصحيحة هي : « مائة وتسع وسبعون درجة » .

٢١ : ٥ حرف حلقة من حلق الكرة العظام . لا يمكن للنص أن يحتمل ترجمة سوتر :

« ... daß du an je zweier sterne ein biegsames lineal (einen Papierstreifen) anlegst, das sich also an einen Großkreis der Kugel anschmiegen kann. ... »

[ ... وذلك بأن تضع على كل كوكبين مسطرة قابلة للثني والانحناء (قصاصة ورق) بحيث يمكن أن تلتصق المسطرة على دائرة (حلقة) عظيمة للكرة ... ] مع أن هذه الترجمة أي الطريقة التي وصفها سوتر قد تكون مناسبة لتنفيذ ما يطلبه البيروني .

٢١ : ١٦ - ١٧ إلا ما بين مشقي الجزء الذي لا يتجزأ وبين نقاته . نستنتج من سياق النص مضمون هذه العبارة وهو ان الانحراف ما بين تصور البيروني للكرة كما جاء في طريقته الثالثة وبين الكرة « الحقيقية » هو انحراف طفيف الى درجة انه لا نفع في الفرق بينهما الا من الوجهة النظرية وليس له من أهمية عملية بأكثر من النتيجة التي نخلص اليها من حيث وجود اجزاء تنجزاً او لا تنجزاً .

### ٣ - الأعلام

نعدد أسماء الأعلام كما أوردها البيروني في الرسالة مضيفين بين قوسين الجزء من الاسم غير المذكور فيها ، ثم يلي الاسم رقم الصفحة الواورد فيها في طمعة سعيدان ورقم السطر بين قوسين أيضاً . وأخيراً التاريخ الميلادي إذا كان معروفاً . مزيد من التفصيل يجده القارئ عند سزكين (انظر الحاشية ٢٨ من مقالنا بالانكليزية) . عطارد بن محمد (الحاسب) ، ( ١١ : ٣ ) . ( أبو حفص ) عمر بن الفرخان الطبري ( ١١ : ٣ ) ، ( أواخر القرن الثامن ) . أبو الحسين ( عبد الرحمن بن عمر بن محمد بن سهل ) الصوفي ( ١١ : ٤ ) ، ١٥ : ١ - ٢ ، ١٥ : ٥ ، ٢١ : ٢٠ ) ، ( ٩٨٦ - ٩٠٣ ) . ( كلوديوس ) بطليموس ( ١١ : ٢٠ ) ، وربما ٢١ : ٢٢ ) ، ( ازدهر ١٣٥ ) . ماريونوس (الصوري) ، ( ١٢ : ١ ) ( ازدهر ١١٠ ) ، ( أبو عبد الله ) محمد بن جابر ( بن سنان ) البتاني ، ( ١٢ : ١١ ) ،



٢١ : ٢١ ) ، ( توفي ٩٢٩ ) . أبو سعيد أحمد بن محمد بن عبد الجليل ( السجزي ) ،  
 ( ١٢ : ١٢ ، ١٥ : ١ ) ، ( توفي ١٠٢٤ ) . أبو ( نصر ) منصور علي بن عراق ، ( ١٢ :  
 ٢١ - ٢٢ ) ، ( توفي بين ١٠١٨ و ١٠٣٦ ) . أبو محمود حامد بن الخضر الحنجدي ،  
 ( ١٢ : ٢٢ ) ، ( ازدهر في النصف الثاني من القرن العاشر ) . أبو العباس ( أحمد بن محمد  
 ابن كثير ) الفرغاني ، ( ١٣ : ٢١ - ٢٢ : ١٤ ، ٤ : ١٤ : ١٩ ) ، ( ازدهر في الثلث  
 الثاني من القرن التاسع ) . ( أبو يوسف ) يعقوب بن اسحق ( بن الصباح ) الكندي ،  
 ( ١٣ : ٢٢ ) ، ( توفي بعد عام ٨٧٠ بقليل ) . ( عمر بن محمد بن ) خالد المروزي ،  
 ( ١٣ : ٢٣ ) ، ( ازدهر في النصف الثاني من القرن التاسع ) . حسن ( ١٤ : ١ ) غير  
 معروف من قبلنا .

#### ٤ - التطبيقات الواردة في نص الرسالة .

نذكر فيما يلي كل اسقاط ( تسطيح ) اوردته البيروني في كتاب تسطيح الصور  
 محققين وصفه حسبما جاء في الكتاب ومحددتين مكان وروده في النص :

١ - اسقاط مارينوس . ١١ : ٢٠ - ١٢ : ١٠

٢ - الاسقاطات المخروطية . حيث تسقط الخطوط المستقيمة من خلال نقطة على  
 قطر الكرة ( ربما على امتداده ) نقاطاً في الكرة على السطح المستوي . ١٣ : ٨ - ١٣ : ٢٠

٣ - الاسقاط المبطخ . في هذا الاسقاط تشع خطوط الزوال خطوطاً مستقيمة متساوية  
 البعد عن القطب ، وتمثل موازيات العرض بدوائر متساوية البعد تتحد مراكزها في القطب  
 ١٣ : ٢١ - ١٤ : ١٧ .

٤ - الاسقاط الاسطواني . وفيه تسقط الخطوط المتعامدة نقاطاً في الكرة على سطح  
 اية دائرة عظيمة . ويسمى هذا التسطيح الاسقاط المتعامد . ١٤ : ١٨ - ١٤ : ٢٦ .

٥ - تنقل الكواكب في الكرة على قطعة ورق رقيق تلف حول الكرة ثم تنزع عنها  
 فتعطي الخريطة المطلوبة . إن أقرب طريقة تسطيح حديثة تكافئ هذه الطريقة الالرياضية ،  
 هي طريقة الاسقاط متعدد المخروطات . ١٥ : ١ - ١٥ :

٦ - وصف البيروني لهذا الاسقاط هو هدفه الرئيسي في رسالة التسطيح هذه . حيث  
 تمثل خطوط الزوال والموازيات بأقواس دائرية . يشير Adams و Deetz إلى أن هذا  
 التسطيح المسمى بالكروي إنما يستعمل في تصوير أنصاف الكرات ، ومع ذلك فلا شيء

صحيح سوى تدريج الدائرة الخارجية وتلريج القطرين واتجاههما أيضاً ؛ ولا يمكن قياس المسافات ولا الاتجاهات ولا يمكن حتى رسمها بياناً وتحديد مواقعها على الخريطة منسهب في شرح ذلك في فقرة لاحقة . ١٥ : ١٦ - ٢٠ : ٢٠ .

٧ - الاسقاط عن طريق بعدي\* الدائرة العظيمة عن نقطتين ثابتتين . ٢١ : ١ - ٢١ : ١١ .

٨ - الاسقاط بدرجاة الكرة من جميع نواحيها على مستوى مماس من خلال نقطة ثابتة . كالاسقاط (٣) غير أن نقطة كيفية هنا نحل محل القطب في (٣) ، ٢١ : ١٢ - ٢١ : ١٧ . يلفت انتباهنا ا. س . كندي إلى أن الخطوط التي تصور خطوط الزوال والموازيات في هذا الاسقاط قريبة جداً من الأقواس الدائرية التي استعملها البيروني لنفس الغرض في الاسقاط (٦) . وبالتالي ، ليكن  $\rho$  طول الشعاع المنجى من مركز الخريطة إلى منحنيات العرض أو الطول مساوياً  $45^\circ$  ، حيث يشكل  $\rho$  مع خط الزوال المركزي زاوية قدرها  $30^\circ$  . في الجدول التالي يعطينا كندي النتائج حيث يستعمل ١ في الحسابات من أجل شعاع عموم الخريطة .

اسقاط كروي	اسقاط ملحرج	الفرق المئوي %
$\rho = 0,620$	$\rho = 0,608$	٢,٠
$\rho = 0,693$	$\rho = 0,704$	- ١,٧

### النتائج

إذا ما أهملنا الاسقاط اللارياضي ( ٥ ) فإننا نستخلص أن البيروني كانت في حوزته في النهاية سبعة تطبيقات لتسطيح الكرة ، وكلها تقبل وصفاً رياضياً صحيحاً . وأن أحد هذه التطبيقات وهو الاسقاط ( ٢ ) يقبل عدداً لا متناهياً من التغيرات . إضافة إلى ذلك ، كما سوف نناقشه فيما بعد ، فقد عرف البيروني التطبيقات الثلاثة التي وصفها بطليموس في « الجغرافيا » أي التصويرين المخروطيين وتصوير المنظور . مما أعطى بالنتيجة حصيلة بعشرة تطبيقات واسعة التنوع مختلفة الخواص زودت الجغرافيين المسلمين - ومصورين الخرائط بمخاصة - بمادة غنية كفتهم قروناً تبع . إن معرفة مدى ما تم من الاستفادة الفعلية من هذه المادة المخروطة والمجاهزة منوطة بمراقبة ما تبقى من خرائط في دور المخطوطات

وبيوتاتها في العالم [ بخصوص بعض مصادر هذه الخرائط ، انظر فديمان ( الفقرة ٣٣ من المراجع في مقالنا بالانكليزية ) ١ ، ص ٦٧ ] ، وبدراسة اسقاطاتها ( تصاويرها ) التي يوحى ظاهرها بأنها لإنشاءات ارتكزت على أساس علمي . مثل هذه الدراسة كفيل بالإحابة على جميع التساؤلات المطروحة حول أثر رسالة البيروني هذه ومدى تأثيرها ، وبالكشف عن العلاقة القائمة بين ما هو نظري وبين التطبيق العملي في العلوم العربية في العصر الوسيط .

## ٥ - شروح إضافية

بما أن مقدمة الرسالة ذكرت خوارزمشاه دون ذكر اسمه فقد أرجعه سوتر إلى أبي العباس مأمون الذي كان شيخ البيروني ( معلمه ) ما بين ١٠٠٤ و ١٠١٧ ، في حين اعتبر روز نفلد وآخرون تاريخ الرسالة في ٩٩٥ م وبذلك أرجعوا خوارزمشاه الى الشخص الذي كان شيخ البيروني لغاية تلك السنة .

من ناحية ثانية ، بين البيروني في كتاب « الآثار الباقية » الذي ألفه حوالي سنة ١٠١٠ ميلادية أنه لا يعرف بالتحديد أية رسالة خاصة بالموضوع ( تسطيع صور الكواكب ) . وأن يكون قد نسي في سن السابعة والعشرين رسالة كتبها في سن الثانية والعشرين فهذا لا يمكن أن يعني سوى أنه لم يكن قد كتب بعد رسالته هذه حين كان يكتب « الآثار الباقية » . وهكذا فإن سوتر محق في قوله إن خوارزمشاه يرجع إلى أبي العباس مأمون . وبالتالي يبدو أن مادة الرسالة ( موضوعها ) كانت في متناول يد البيروني في « الآثار الباقية » لذلك أمكنه إضافة تطبيقين جديدين إليها : ( ٧ و ٨ ) من الاسقاطات التي ذكرناها أعلاه ، ليصوغ فيما بعد عام ١٠٠٤ بقليل رسالة جديدة يهديها إلى شيخه الجديد .

سنناقش فيما بقي النقاط التي اعترضتنا في نص رسالة « تسطيع الصور » محاولين الاستناد إلى المقارنة بين نصها الحالي وبين الفصل القريب إليها من كتاب « الآثار الباقية » .

١٣ : ٤ - ١٥ : ١٠ . إن الاختلافات الرئيسية بين معالجة مختلف الاسقاطات المعطاة هنا وبين المعالجة التي وردت في « الآثار الباقية » هي : ١ - تعطي الدراسة في « الآثار الباقية » وصفاً دقيقاً للاسقاطين الاسطواني والمبطخ ( مع ذلك لم تستعمل كلمة « مبطخ » ) في حين أن الرسالة تعطيها بالدرجة الأولى وصفاً بلغة علتها وتضيض في تاريخ المبطخ . ٢ - يذكر البيروني في « الآثار الباقية » العالم أبا حامد الصغاني ( القرن العاشر الميلادي )

على أنه كتب في تسطيح الكرة من نقطة تقع في المحور وليس في القطب ، ويحيى وصف ذلك أيضاً في الرسالة ( ١٣ : ١٠ - ١٣ ) . ٣ - يتكلم البيروني في « الآثار الباقية » عن الاسقاط الاسطواني قائلاً : « ... ولم يتصل بي أن أحداً من أصحاب هذه الصناعة ذكره قبلي » . في حين أنه في رسالته يذكر الفرغاني بشكل صريح ( ١٤ : ١٩ ) عندما يقول : « وأما التسطيح الاسطواني فهو الذي خطر ببالي من كثرة ما أفاض فيه الفرغاني من الهديان في آخر كتابه ... » .

١٨ : ٩ - ٩ . استناداً إلى Luckey فإن المهاني يضيف إلى الطريقة البيانية (الصناعية) التي قدمها لحل معضلتين من معضلاته حلاً حسابياً استعمله بعبارة « باب ذلك من الحساب » ، وكما هو معلوم في كتابه « الصناعة الفلكية » (The Analemma) يقرر بطليموس الطريقة الحسابية المتطابقة جنباً إلى جنب مع الطريقة الانشائية (الصناعية) . إن مثل هذه الطريقة الحسابية للخريطة لا بد أن تحتوي بعض المنفعة . فإن إنشاء مراكز دوائر الطول أو العرض بدرجات دنيا بواسطة المسطرة والبركار قد لا يؤدي الصورة المطلوبة وتصبح الدقة في مثل هذه الحالة مشكلة حقيقية .

١٨ : ١٠ - ١٨ ( انظر مقالنا بالانكليزية Fig. 2 ) لتكن الدائرة المعلومة ABCD نصف قطرها  $EB = 90$  ولتكن دائرة الطول DTB حيث  $TE = \lambda$  ( :  $\lambda > 90$  ) والمطلوب إيجاد TZ ( نصف قطر دائرة الطول التي نرسم إليها R ) و EZ ، البعد بين مركز الدائرة المعلومة ومركز دائرة الطول . إن الوتر BD في دائرة الطول عمودي على القطر في E ويقسمه إلى جزئين  $\lambda$  و  $EZ + R$  . إذا  $EZ + R = 2B^2 = \lambda$  وكذلك  $EZ + R = 8100/\lambda$  حيث  $EZ = R - \lambda$  إذ بإضافة  $\lambda$  إلى حاصل القسمة ينتج  $2R = \lambda + 8100/\lambda$  . وهكذا  $R = 8100/2\lambda + \lambda/2$  مع أن هذا لم تذكره الرسالة وإنما ذكر فقط في « الآثار الباقية » . وكذلك بطرح  $\lambda$  ينتج  $EZ = 8100/2\lambda - \lambda/2$  البعد بين مركزي الدائرة المعلومة ودائرة الطول  $\lambda$  . مع أن البيروني يقرر في « الآثار الباقية » أن بإمكاننا الاستغناء عن معرفة البعد بين المركزين .

١٩ : ١ - ١٧ . ويهم البيروني ، على سبيل الافتراض ، بتحديد القوس AH لأن الخط الواصل بين B و H سيقطع حيثن EA ( أو امتداده إذا لزم ) في مركز دائرة الطول وهكذا يزودنا بطريقة أخرى لإيجاد هذين المركزين . في التحليل التالي لاشتقاق البيروني رمز AH

مثل  $(A-X) / (B=Y) - C$  بنعكس النص العربي بكل أمانة حيث لا يكتفي البيروني بأن يدكرنا أن  $A/B = C$  فحسب بل وأن  $A$  تساوي  $X$  و  $B$  تساوي  $Y$  . والآن يأتي التحليل كالتالي ( انظر الشكلين 2,3 Figs ) إذا كان  $HK \perp AE$  فإن ( حسب اقليدس )  $AZ \cdot ZG = BZ \cdot ZH$  وكذلك  $AZ \cdot ZG / BZ = ZH$  حيث  $AZ = |ZE - 90|$  و  $ZG = AZ + 180$  في حالة الشكل (Fig. 2) بينما  $ZG = 180 - AZ$  في حالة الشكل (Fig. 3) . إذاً  $ZH : HK = ZB : BE$  وهكذا .

$$ZH \cdot (90 = BE) / (ZB = R) = HK = \sin_{90} AH$$

$$\text{إذاً } \sin_{60} AH = \sin_{90} AH \quad (1/3) \sin_{90} AH = 40' \sin_{90} AH$$

$$\text{ومن ثم } \sin_{60} (\sin_{60} AH) = \text{قوس } AH$$

$$\text{وبالتالي } \sin_{60} (40' \cdot ZH \cdot 90 / R) = \text{قوس } AH$$

والذي ميقاس باتجاه  $B$  عندما تكون  $Z$  خارج الدائرة المعلومة وباتجاه  $D$  عندما تكون  $Z$  داخلها . تحدث الحالة الأولى عندما تكون  $ZE > 90$  وتحدث الحالة الثانية عندما تكون  $ZE < 90$  في حين أنه عندما تكون  $ZE = 90$  تقع  $Z$  في  $A$  .

١٩ : ٢٤ - ٢٠ : ٦ ( انظر الشكل 4 Fig ) لإيجاد مركز دائرة العرض MTL نقول عَرَضاً (  $MS = \sin MD$  ) ونلاحظ أن (  $SE = \sin(90^\circ - MD) = AM$  ) بالتغيير الى المقياس التسعيني يكون :  $SM = (3/2) \sin_{60} DM$  ،  $SE = (3/2) \sin_{60} AM$  ومن ثم  $TS = SE - TE$  . ليكن  $R$  نصف قطر دائرة العرض ، وهكذا فإن  $MS^2 = TS(SZ + R)$  وهذا معلوم . بما أن  $TS$  معلوم كذلك يمكننا حساب  $R$  من المعادلة المتطابقة (  $SZ + R = \frac{1}{2} TS + \frac{1}{2} (SZ + R)$  ) بينما  $R = EZ + ET$  البعد بين المركزين . وهذه الصيغة أيضاً غير موجودة في الآثار الباقية .

٢٠ : ١٣ - ١٩ لإتمام حساب  $DH$  على البيروني أن يبين أن نقطة  $H$  تقاس دائماً من  $D$  باتجاه  $A$  أي أن مراكز دوائر العرض تقع خارج الدائرة المعلومة . وهو يلاحظ أولاً أن  $DT : DE = DM = 90^\circ$  وهذه هي خاصية التقطع  $M$  و  $T$  المحددة ، ثم يقول إن وتر  $90^\circ : (DM)$  وتر  $90^\circ < DM$  وهي مسألة مباشرة الاتصال بنظرية بطليموس الرياضية العامة التي استخدمها في المجسطي والتي تقول إنه إذا كان  $\alpha$  و  $\beta$  قوسين لنفس الدائرة وإن  $\alpha > \beta$  فإن  $\beta < \alpha$  : وتر  $\alpha$  وتر  $\beta$  . وبما أن  $DM > 90^\circ$  ،  $90^\circ$  وتر :  $DM$  وتر  $DT : DE < DM$

وكذلك بما أن  $DE > 90^\circ$  وتر فإنه يتبع ذلك أن  $DM > DT$  وتر . وهذا كما يرى البيروني يتضمن بالضرورة أنه لا يمكن لدائرة مركزها في  $D$  أن تمر من خلال نقطتي  $M$  و  $T$  معاً ولا يمكن أيضاً لدائرة يقع مركزها بين  $D$  و  $E$  أن تمر من خلال  $M$  و  $T$  .

٢١ : ٢٦ كتب المسالك والممالك هي أعمال اعطت الطرق والمواقع والأبعاد بين الأماكن لتستخدمها سلطات البريد ، وأول كاتب عرف في هذا المضمار هو ابن خردادبه الذي كان موظفاً رسمياً في البريد في سامراء ، واستناداً إلى سوتر أنه كتب في حوالي ٨٤٥ م . يتكلم البيروني في كتاب « تحديد الأماكن » عن منهج الجيهاني وغيره في كتبهم عن المسالك ، وفي كتابه « شرح تحديد الأماكن » يعرف ا. س. كندي الجيهاني على أنه أبو عبد الله محمد بن أحمد الجيهاني الذي ازدهر على الأغلب في حوالي ٩٢٠ م . هذه الكتب التي شكلت في حد ذاتها تعليماً قام سنين طويلة صنفها حاجي خليفة الذي توفي سنة ١٦٥٧ - ٥٨ م في باب الجغرافيا تحت علم مسالك الممالك - في الجغرافيا - .

٢١ : ٢٧ يبدو أن تلوين الخرائط يرجع في النهاية إلى زمن مبكر في عهد الخرائط العربية الأولى . ويذكر قيديماني في حاشية عن السعدي قوله : « وهذه البحار كلها مصورة في كتاب جغرافيا ( بطليموس ) بأنواع من الأصباغ مختلفة المقادير والصور . ... إلا أن أسماءها في هذا الكتاب باليونانية يتعذر فهمها . » إن هذه الجملة الأخيرة ليست تعني بالضرورة أنه رأى خريطة يونانية ( أي باليونانية ) وإنما فقط أنه رأى نسخة عربية كتبت الأسماء اليونانية فيها بحروف عربية ، إذاً لا تزال « يونانية » .

٢٢ : ٣ - « العبارة العربية هنا » مقالة في تصحيح « تنطبق تماماً على بداية العنوان الذي أدرجه البيروني في فهرس أعماله والذي يمثل الفقرة ( ٤ و II ) من ترجمة قيديماني لهذا الفهرس وهو ( بحسب ترجمة قيديماني ) : « مقالة في تصحيح ( تقويم ) مقادير طول وعرض الأماكن المعصورة في الأرض » . ولا نعرف لهذه المقالة نسخاً متواجدة .

## ٦ - مصادر التصوير ( الاسقاط ) عند البيروني

مع أن سوتر يضمن أن تطبيق البيروني كان اختراعاً بمثابة تعديل للاسقاط المجسمي ( ستريو غرافي ) فنحن ميالون إلى الاعتقاد بأن الحالة ليست كذلك . فقبل كل شيء - يوحى الحساب بأن  $SR$  ، وهو أقصى بعد بين النقطتين اللتين تقطع عندهما دوائر البيروني الطولية  $AG$  ( انظر الشكل Fig. 5 ) واللتين تقطع عندهما صور دوائر الطول في الاسقاط المجسمي ( ستريو غرافي )  $AG$  ، يساوي نحو ٩٪ من نصف القطر .

وبالتالي فإن دوائر البيروني مدفوعة بشكل ملحوظ نحو المحيط قياساً إلى الدوائر المجسامة لكن هناك دليل آخر ياد للعيان ذاك أن البيروني لا ينظر إلى الاسقاط المجسامي ( التصوير السريوغرافي ) على أنه يمثل خريطة جيدة للكواكب ، وقد عبر عن ذلك في « الآثار الباقية » . وبالنظر إلى وعيه المترك ونفاذ بصيرته في فهم تباين الغرض بين التصوير الاسطرلابي والتصوير الجغرافي ، يبدو أن البيروني لم يوفق في النظر إلى من قبله ليستلهم منهم لمن بعده .

وحدثنا هو أن التصوير الذي وصفه البيروني هو في الواقع تبسيط للاسقاط المخروطي الثاني الذي وصفه بطليموس في « الجغرافيا » . وهذا الاسقاط الثاني حلله Hopfner ثم تبعه في ذلك Neugebauer . ويكتفي القول هنا إن فكرة بطليموس كانت في استخدام ثلاث أقواس دائرية متحدة المركز لتمثل ثلاثة موازيات عرضية وخط مستقيم ينصف الأقسام الثلاثة جميعاً ليمثل خط الزوال المركزي .

بعد أن يتم اختيار مقياس الرسم بدقة تحدد دائرة معلومة من دوائر الطول في الكرة ثلاث نقاط كل واحدة منها تقع على إحدى الأقسام الثلاثة المتحددة المركز والدائرة المارة بهذه النقاط الثلاث هي صورة دائرة الطول تلك .

يكون تعديل هذه الطريقة لمن يود تصوير نصف الكرة بكاملها بأن يدع أقواس الحد الشمالية والجنوبية تتضاءل في القطبين وأن يأخذ من أجل القوس الوسطى خط الاستواء الممثل حالياً بخط مستقيم ينصفه خط الزوال المركزي ويدرج طبقاً للمقياس نفسه الذي درج به خط الزوال هذا . إن النقطة المتناظرة مع الطول  $\lambda$  في خط الاستواء تحدد مع القطبين ، دائرة وحيدة تحتوي قوسها هذه النقاط الثلاث وتمثل دائرة الطول  $\lambda$  . وهي من أجل دوائر العرض ، كما هو الحال في خريطة بطليموس ، تقطع خط الزوال المركزي إلى قطع تساوي فروقها فروق العرض . أمنت هذه الخاصة في خريطة البيروني ليس فقط خط الزوال المركزي وإنما أنصاف دوائر الطول المحيطة بـ  $90^\circ = \lambda$  أيضاً ( شرقاً وغرباً ) ، وكذلك أقرت بالطبع اتساع تدريج المقياس هناك عن تدريجه في خط الزوال المركزي بعامل  $\pi/2$  . كما حددت من أجل كل موازٍ من موازيات العرض ثلاث نقاط ثابتة تمر فيها المنحنيات التي تمثل هذه الموازيات . وبذلك يستفيد البيروني من فكرة دوائر الطول ليستعمل للعرض دوائر عرضاً عن المنحنيات .

من المؤكد أن البيروني يعرف « جغرافيا » بطليموس حتى إنه رجع إليها عبر تقديمه للتطبيق الذي استخدمه ما رينوس الصوري . علاوة على ذلك فإن النسخة العربية لـ « الجغرافيا » اشتملت على وصف بطليموس لتطبيقات استخدمت على الأرجح في الخرائط العربية . إلا أن البيروني حسب حتمنا أهم ، وهذه كانت حاجته أولاً ، بالتطبيقات التي ستصور نصف الكرة بكاملها ، مما استدعاه إلى تعديل صنيح بطليموس ليصل بعد ذلك إلى خريطة تصور نصف الكرة بكاملها .

#### ٧ - التحريف في تطبيق البيروني

كما يلاحظ البيروني فإنه من الحال تمثيل سطح الكرة على مستوي منبسط بضبط واحكام، أي أنه لا يمكن الحفاظ على الزوايا والمساحات . وتبقى مهمة الخرائطي اختيار أفضل تصوير ( اسقاط ) يلائم متطلباته ، وقد كانت متطلبات البيروني جلية واضحة عبر عنها من خلال نقده اسقاطات الآخرين إذ يجب أن يتلاءم التصوير ويكون مناسباً بحيث يمثل نصف الكرة على أن لا يحصل ازدحام في بعض أجزائه . كما يجب أن يمثل ( التصوير ) الكواكب ومجموعات النجوم وبخاصة الهامة منها على طول منطقة البروج وأفلاكها بأشكال معقولة أقرب ما تكون إلى ما تراه العين .

ومن الواضح أن تصوير البيروني استجاب لمطلبه الأولين . والسؤال الآن كيف تلاءم مع مطلبه الثالث ولم يدخل تحريفاً كبيراً على أشكال الكواكب نسبة إلى الجزء المركزي من قبة السماء ؟ لا شك أن البيروني فكر في كيفية تحقيق مطلبه الثالث هذا بشكل جيد معقول حتى إنه ربما أنشأ هذه الخريطة لإرضاء رغبته الشخصية في هذا المجال ، تعلمنا خريطة البيروني هذه في الواقع أشياء كثيرة ( انظر مقالنا بالانكليزية ) .

في عام ١٨٨١ أنشأ A.M. Tissot نظرية في تصوير الخرائط أخذت بعين الاعتبار التحريف المحلي ومكنتنا من عمل قياسات خرائطية أدق . لقد شرح P. Richardus و R.K. Adler وكذلك A. H. Robinson هذه النظرية ، وقد أعطينا في بحثنا هذا نتائج التصوير الكروي عند البيروني فقط كما حبه L. Driencourt و J. Laborde واستخرجنا ثانية بعض أجزاء جدولهما رقم XXXII ( انظر Chart I ) .



## الخلاصة

رأيا كيف أن البيروني في رسالته هذه التي ألفها فيما بين ١٠٠٤ و ١٠١٧ أضاف ثلاثة اسقاطات ( تصاوير ) جديدة إلى حصيلة التطبيقات المعتبرة التي كانت متوفرة آنذاك بين أيدي رسامي الخرائط المسلمين . وناقشناها وأظهرنا أنه استلهم أول هذه الاسقاطات الثلاثة من بطليموس ، ثم حللنا أهم اسقاطين بينها . وهما ، مهما احتويا من التحريف ما يرالآن في الواقع يستخدمان عموماً حتى يومنا هذا ، مما يدل بل ويعبر باختصار ، كيف أن شعور البيروني الوائى الأكيد قاده في مواضيع بحثه إلى نتائج هامة .

ثم اذا ارد عمل مجسم من المذكورات في كرة وسعت دايرة وعمل  
فيها شكل شبيه بقاعدة المجسم ولكن الدائرة ومركزها ووضع  
الاضلاع المعمول فيها

وتخرج من نقطتها د

على سطح الدائرة وتجعل

أد مثل أ ب وبسعة على

ب وتخرج من د في

سطح خطي ق أ آ ر ه ح

موازي لآ ر وتجعل ه ح

كار ممسا آ ه دائرة آ

آ د كانت احدي دايرتي قاعدة الاسطوانة في كرة كان خروح على

استقامته انظر اليك ه لان السطح المنصف للاسطوانة على مواز ه

القاعدة يمر بمركز الكرة ضرورة كون د ابرى واعدها مساويين ويكون

ه ح في ذلك السطح ونقطته على سطح الكرة ويصل ح ر فهو عمود على سطح الدائرة

وميل ه آ ح مركز الكرة ويصل د ح فهو يصف قطر الكرة موازي لآ ر ه ح وتخرج

ه ح الى ط مساويا لـ د و يرسم على بعد ح د د س د ط من قطعة ذلك الكرة ثم

يرسم في الكرة المفروضة اولا عظيمة كاسهرك وكال قمره والمركز ك

وبقسى ك م على ن ه حتى يكرر سه ك ن الى ن ه سه ط ه الى ه ح

ومن ن ه عمود ن ه س ر ويصل سه م س ك فلان نسبة ك ن الى ن ه سه ط ه الى ه ح

نسبة ط ه الى ط ح فعد س ر ط ه سه قواسمهم ك وكسبة ن ه الى ن ه س ر

كسبة ط ه الى ه ح فيخرج س ك على س ر ن ه عمودا عليه فيجد د دائرة

نصف قطرها مساوي ن ه م وتخرج س ر ن ه الى ح ويكون نسبته

س ر ح الى النصف قطرها كسبه ق أ الى آ ر ونسبه نصفها قطرها الى

الى ضلع الشكل المعمول فيها الشبيه بقاعدة الاسطوانة كسبه آ ر الى آ ب

فالمساواة سه سه س ر الى ضلع الشكل المعمول هو بقدر س ر ح وكذلك

القول

والضلع المعمول  
في الكسبة ق أ آ ر

ن ه  
مكون

القول في القاعدة العمل المعمولة في دائرة من سطح فاذا انما الشكل  
 حقل اسطوانة كما فرضت وذلك ما اردناه ثم ولحمد الله وحده  
 والصلوة والسلام على من لا نبى بعده

بسم الله الرحمن الرحيم

بارك دوله واعز نصره وايمين طابرو واسرجاله وخير سعادة واجل ملك  
 واغبط مدة واحب ناله

الفكر على التعمق واجب في بداية القول والفطن وبه يستحق عليه مزية  
 الزيادة في الحسني من اجل ذلك تجب على جميع الاوقات وفي كل الحالات  
 انارة معالم الهدى والنشأ واعادة مراسم الشكر والدعا وهبه رسوم يقصون  
 بايرادها حقوق مواليمهم ويظهرون لها عقايدهم في اعيادهم واحايين  
 محهم ومسراتهم على حب احوالهم واقاديرهم ومولانا الامير السيد  
 الملك العادل ولي النعم خوارزم شاه اطال الله تعالى في العز والرفعة بقائه  
 وادام قدرته وعلاه ونصر رايته ولواه وحرس ملكه وملكاه  
 وابد سلطاناه وثبت دولته وسنانه واكرم حفدته واعتر اولياه وكبت  
 حسدته وخذل اعداءه تاج الملوك فاطمه واباحه نازح ساير الايام  
 وحضرته معدن العالي والمفاخر ومنبع الحامد والمآثر وتجمع افناء  
 الخلق من افطار الارض لما ذا فوه فيها من طيبة الامن وحلاوة العدل  
 وعلو الهمة والجود الفايض على الكل والفضل الشامل للقاصي والداني  
 وتقريب اهل العلم والحكمة وانزالهم من المنازل والتوفير عليهم فوق  
 الاستحقاق ورفعهم من الخبط الى عنان السما فانه تغمر من حمرة  
 الشريفة ويصون بلدته المنيفة الرجعة جنة وسعة جوده  
 وهما لنا لحد من نشأت في ظل ملكه وانجذبت بعد طول الغربة  
 الي واسطة حماكم وثلت بحلب العالي ناده الله تعالى رفعة  
 وعلا من التقريب والارفاق من غير استيجاب واستحقاق

والصالحات

ما نقت به اقربا واشكالاً وقرب جبرته الى غايته وكالي وحقل من  
 تسربل بمثل هذه اللؤلؤ ان يتجرد لخدمة مولاه وولي نعمه  
 سوا وجهه ويبدل اقصى وسعه وغاية مجهوده في القيام  
 بلوازم الشكر وان كان المولى مستغنيا عنها ولكن اخذاً بالافضل  
 وتمسكاً بالاليق بطريق العقل وان ليلة السدف من الليالي  
 الشريفة والاعباد العطية الاكاسره واحبوا فيها رسوم  
 قدما الملوك وفيها وفي امثالها يهدي الصغير الى الكبير ويتقرب  
 المامور الى الامير اظهار العبودية المستكنة في الضمير ولو  
 امكن التقرب الى المجلس العالي بالروح والبدن لكان مستصفاً  
 فيجب الحق الواجب لكن الخدمة العلية اجل من غيرها واعلى  
 من سايرها وقد قرعت لهذا الكتاب بانها ورفعت اسرارها  
 ومهدت لها طرقاً ساجري على نسبتها فيما يستأنف ما بقيت  
 جازاً اذ يال هذه الخدمة الجليلة مستظلالها الظليله  
 والله الموفق لذلك والمعين عليه ان معرفة الصور  
 الشاملة للكواكب المرصودة مزيج من مازين به السما وحطت  
 ايات المناظرين نظراً اعتبار علامات للضالين في البراري  
 والبحار ليس يسير المنفعة والفائدة في كل واحد من  
 من قسي صناعة التجميع اما في علم هيئة الافلاك والكواكب وحركاتها  
 ومزاولة الارصاد مما يحتاج اليه من ارتفاعها وابعاد  
 ما يليها ومعرفت الاوقات بالليالي عند الحاجة الى تحديد  
 والا بانه عن مكاييل الحركات وموازين الازمنة الماضية  
 منها والمستقبله وحقيق العودات في الافلاك الخارجة  
 المراكز وقياس ساير الكواكب اليها وما أشبه ذلك واما  
 في صناعة الاحكام المنبئية عن افعال الاجسام السفلية  
 من تاثير الاجرام العلوية مما اخفاه به من الحاجة الى معرفة

اعظاها

اعظامها وكيفية مزاجها والواظا بالعيان ومواضعها من الصور  
 تستعمل في المواليد ونقاويلها ونقاويل سنى العالم وطوال الاجتماع  
 والاستقبالات وليس ايضا بقليل للبدوي والعابدة في المعارف  
 العامية من استظها راوقات السنة عند اختلافها بترادف  
 الفصول ومعرفة الاحوال الطبيعية الحادثة في السنين  
 طول الدهر على قريب من نظام واحد من البر والبحر واليه  
 والرطوبة والاعتدال والموحودة منها بالبحارات غير مختلفة  
 الا باختلاف الامكنة والبقاع كالانواء والبوارق والوقدات و  
 والجرات والبواخير وَايام العجوز وامثالها مما يستعملها  
 الروم والهند والعرب ومعرفة اوقات النتائج والتي يجب  
 فيها القحح البهايم وغرس الاشجار وزرع الزروع وتختلف  
 في غيرها ومعرفة الاوقات التي تشتد فيها البحار وتحتاج  
 وتتمتع سلوكها ومعرفة وضع البلاد في الارض بعضها من بعض  
 ووضع الجبال والبحار والانهار وانعطافها وسلوك الطريق  
 المقاربة واستخراجها للتسرية العساكر وتسريع القوافل  
 ومعرفة مسامحة المواضع بعضها البعض اما لفسدها واما  
 لاستقبال قبل التواسير الموصى في كتب الله تعالى وكتب انبيائه  
 عليهم السلام استقبالها في جليل الشرايع وقل ما يوجد من يتوسع  
 معرفتها عيانا حتى يشير الى كل واحد منها اشارة تقع السائل  
 وترشد الطالب الى اليقين بل اكثر ما اقول في ذلك على  
 الكتب المخصوصة بذكرها ككتاب عطار د بن محمد في حجة  
 النجيين وكتاب عمر بن القرحان الطبري في صورة الكره  
 وكتاب ابي الحسين الصوفي في الكواكب الثابتة وكتب  
 اصحاب الانبا المقصورة على ذكر مذاهب العرب ومعلوم  
 ظاهر ان تلك الصور المقصورة في تلك الكتب وان خفي فقرها

ودقق كما ياتنا فاتها عند تواتر الشخ وكثرة النقل متغير ولا تثبت  
على حالة واحدة بل تقسد وتبطل ولو كان النقل بالبركار و  
المساطر وخاصة فان الصور التي في تلك الكتب هي مفردات  
متميزة بعضها من بعض لم يصور فيها بالجملة حتى يستعان في معرفتها  
والاحاطة بكيفية اوضاعها ووقوعها بقياس احدها الى الاخر  
ومثي اراد منزلة نقل ما ذكر من احوال هذه الكواكب في الكتب  
والجدول المركبة طال الاكر معلومة من اى جسم كان  
محاكاة لها في كرة الفلك على ما لبثت في كتاب صنعة الكره  
لم يقادر المحكيه بوجه من الوجوه وكانت واقعة  
في العيان بالكلمة غير مفردة ولكن ليس تخفي  
ان ذلك يمتنع في صغار الاكر ويمكن في كبارها والكجادر  
منها عزيمة الوجود عظيمة المودة في النقل والحمل والانتقال  
والمباشرة حتى ان صعوبة ذلك فيما يوازي الانتفاع بها  
ان لم يفضل عليه فاما اذا نقلت هذه الكواكب وصورها الى  
بساط السطوح المستوية القدله فان ما صعب في الاكر  
يسهل فيها لكن الامر في المحاكاة ان يجري على مجراه في الاكر  
ولما وثقت على كتاب بطليموس في صورة الارض المرسوم  
جغرافيا وما حكاها فيها من فاربيوس من الارشاد  
الى كيفية تصوير صورة الارض في سطح مستو  
تخطيط خطوط متوازية لخط الاعتدال واقامتها مقام  
دوائر العرض اعني افلاك انصاف النهار وتخطيط  
خطوط موازية لخط الاعتدال واقامتها مقام دوائر  
الطول اعني المداراة الموازية لمعدل النهار وزعم ان  
تقاطع دائرة طول البقعة المطلوبة مع دائرة عرضها  
هو موضعها في سطح التصوير وليس تخفي على متأمل ان الطول  
الكل

الكلي الذي هو نصف دور في كل مدار يكون في هذا الوضع بالقرب  
من القطبين مساوي المقدار لخط الاستواء لاستعماله مشابهة للدوائر  
في الكرة وان العروض توجد على خطوط متوازية وهي في الخطوط توجد  
من خطوط لا تتوازي ولكن تقع على قطبين بأسرها وذلك بحال ٤ ، ٥  
ومثله بينهما محمد بن جابر البتاني في زيجيه حين اراد استخراج سمت  
القبلة وموضع مكة من سطح الافق فاخذ من طرف سطح الاعتدال  
الاقرب الى مكة في محيط الدائرة مقدار فضل ما بين العرضين في جهة  
الجنوب وان كان عرض مكة اقل من عرض البلد وفي جهة الشمال  
ان كان اكثر منه واخرج من المنكبي خط العرض مواز لخط الاعتدال  
ثم اخذ من طرف خط نصف النهار الذي في جهة خط العرض مقدار  
ما بين الطولين الى الجهة التي فيها مكة عن البلد واخرج من المنتهي  
خط الطول مواز بالخط نصف النهار وزعم ان ما تقاطع خط الطول  
من خط العرض هو موضع مكة في سطح الافق فاستخرج به حينئذ  
مقدار بعد سمته وذلك من عمل سمت القبلة خطا فاحش قد استمره  
علية جميع العالم في كتبهم في سمت القبلة كان سعيد احمد بن محمد بن عبد الليل  
وكا في مرسوم علي بن عرق وكا في محمود حامد بن الغضن المجندي جالسي ذلك  
علي ناصب اصول يتوصل لها في صوري ما في كرة السماء من الكواكب الصغار  
وما في كرة الارض من البلاد واللبال والبحار والاهوار وغيرها  
ليبي عليها من عني بذلك ولا عمل غيره فاقول انه معلوم المئين بالان  
التجيم وصاناعها والتحصن عن حقايقها ودقايقها بعد النظر في علم  
الحية واخذ لخط الواف من الهندسة ان الدوائر والنقط التي في  
الكرة لا تنقل الى السطوح المعتدلة الا بان يمر عليها خطوط مستقيمة  
وسيط مخروطات قايمة ومائلة وسايط اساطين وسايط مجسمات  
ناقصة اما الخطوط المستقيمة وسايط المخروطات فهو الذي يلهيها  
صنعه الاصطرلاب باختلاف وضع رؤوس المخروطات ومبدأ

ومبتدأ تلك الخطوط في جهتي الشمال والجنوب صارت الاسطرلابات  
جنسين جنوبي وعالمي وبأخلاف اوضاعها على المحور اما على قطبي  
الكرة واما داخلها واما خارجها على استقامة المحور تنوعت  
الدوائر المنقولة له فصارت في السطح خطوطا مستقيمة ودوائر  
وانواع الثلاثة الزائدة والناقصة والمكافئة ومعلوم ضرورة  
عيانا ان الدوائر المتساوية الابعاد في الكرة في الكرة تتسطح في  
هذه السطوح اما مختلفة الابعاد ان توازت واما مختلفة  
الابعاد وغير متوازية فتتضابق ابعاده باعلاها في مواضع وتوسع  
في آخر ولما كان ذلك كذلك لم يكن المنقول منها على قسب ابعادها  
في العيان الا ان يكون السطح عامسا للوسط الصورة المقصودة وروقت  
المحروقات خارجة من رأس القطر القائم على ذلك السطح فينبذ  
يقبل التفاوت في العيان ومما كانت الصورة الى رأس المحروقات  
اقرب كان التفاوت المذكور اكثر وقد يمكن نقل ما في الكرة الى  
السطح بطريق آخر قد نسبته ابو العباس الفرعاني في عدة نسخ  
من كتابه الموسوم بالكامل الى يعقوب ابن اسحاق الكندي  
وفي عدة منها الى خالد بن عبد الملك الروروذي وهو الذي  
وهو الذي يسمى اسطرلابا مبكرا ووجدت في كتابا مقصورا  
على صنعه واصحاب هذه الصناعة فيه فريقان اما مستحسنين  
واما مستحسنين اياه اما المستحسن فقد يتفهم احوالهم في نجاحهم  
في الرد على صاحبهم ويمتنع له وذلك كالفراغاني واما المستحسن  
فمن زاعم ان الكرة قد تنوعت فيه مبطنة على احد قطبيه متفقة  
على القطب الآخر ومن زاعم انه ليس بين هذا الاسطرلابي  
وبين التسطيح المذكور مشاركة بل فيه جار مجري الالات الهياكل  
لاستخراج الطوالع والارتفاعات كالرخامات وغيرها ولنا  
ثالث هذا الفريقين ومدع في هذا الاسطرلاب ما اعتقده

من ذلك



من انه نوع من انواع التسطيح المخروطي المتقدم ذكره وساعمل  
 في صنعه والابانة عن حقيقته كتابا فيما بعد انشاء الله تعالى  
 او الا ان افول ان تسطح الميطح لم يمكن فيه الا تصور احد نصفي  
 فلك البروج اما الشمال والجنوبي وسطر اضافة النصف الآخر  
 اليه لا يتناع الانقاد فيه كلا الزدادت ضيقا في الكرة ومجاوزة  
 الحد الماحل ممكث في ذلك ثم الكتي على تصور كل واحد من نصفي  
 فلك البروج في شكل على حدة فان اعظم الصور نفعا واكثرها  
 حاجة الى البيان اعني المعترضة على وسط منطقة البروج  
 وعلى معدل النهار ينقطع وينقسم الى كلا المشكلين وذلك  
 مما يبعد عن المطلوب واما التسطيح الاسطواني فهو الذي خطر  
 ببالي من كثرة ما فاض فيه الفرعاني من الهديان في آخر كتابه  
 من الررد على الاسطرلاب الميطح وانظر ان السوي الى الله وقد سميت  
 التسطيح لعله ليس هذا موضعها وهو نوع متوسط لا شمالي ولا  
 جنوبي وبه يمكن ان تسطح الكواكب الفلك باسرها في سطح فلك معدل  
 النهار او في سطح اي دائرة عظيمة فرضت لكن الصور الشمالية  
 والشمالية تجتمع فيها وينزكم بعضها على بعض والكواكب القريبة  
 من محيط دائرة التسطيح تتصابق مواضعها جدا وتتفاوت حتى ربما  
 يركب كواكب جنوبية وشمالية فاعتدت في رأي العين فاما المسألة  
 منها المركز دائرة التسطيح البعيدة من محيطها فوقعها يكون قريبا  
 من الحقيقة وقد سمعت ابا محمد بن عبد الجليل المهندس يخلى عن  
 ابي حسين الصوفي انه كان يضع الكاغد الرقيق على الكرة ويلصقه  
 على سيطها حتى يبطا بقها مهندما على ظاهرها ثم يخط فوقها  
 الصور وتقط الكواكب على حسب ما يظهر منها بالاشفاف  
 وذلك تقريبا اذا كانت الصور صغيرة ويبعد اذا كانت  
 كبيرة فانه اعني ابي الحسين يزعم في مواضع من كتابه وفي

عدة من الصور المأثري في الكره خلاف ماثري في السماء وذلك  
لخطا في جدا ول الجسطي التي منها تعل الكره فلم يري ان كان ذلك  
الخطا اليسير يقع في الكرة ما يظهر به التفاوت للعيان فلم يلحظ  
ان يقع في السطح المستوي الذي لا يطابق المقياس مهندما الا بان  
تقطعت منه مواضع وتلتوي وتضعف فاذا اعيد الى السنويه  
عاد المنخفض منبسطا والمصاعف منعددا واذا كانت الوجوه المذكورة  
كلها كثيرة التفاوت بين ما يعاين في الكرة وبين ما يعاين في السطح وجب  
علينا ان نختار لها حيلة تقرب بها الامر بين العياين وان كان اختراع  
وجود النسبة المطوق لها بين الخط المستقيم وبين المنحني وعدمها  
كذلك بين السطح المنحني وبين السطح الكروي تحول بيننا وبين ان  
يعمل ذلك كما هو بالحقيقة فاقول اننا اردت ان تصور  
الصور الفلكية على سطح مستو فاننا ندير على مركزه دائرة احد  
لنصف الفلك الذي من اول من ح المحل الى اخر من العبدل وترتها  
بنظري احب د وليكن نقطة الاول للمحل وح لاخر العبدل  
وقد للجنوب ود للشمال ونقسم كل واحد من اربع محيطها الاربعة  
بثمانين قسما متساوية ويقسم ايضا من انصاف قطرهما الاربعة  
بثمانين قسما متساوية ونخرج هذين القطرين في جهاتهما  
على استقامتهما خارج الدائرة بلا غاية مفروضة ونطلب على  
كل واحد من خطي هـ د مراكز دوائر تمر كل واحدة على نقطتي  
ت د وكل قطر من اقطار القطر ونطلب ايضا كل واحد من خطي ح د  
ج د مراكز دوائر تمر على ج د من اقسام القطر وعلى مثل  
عدد من اقسام المحيط من كلا الجانبين ففي المثال نجعل ا ح  
قسما واحد من اقسام ا ه التسمين ونطلب على خط هـ د مركز  
دائرة تمر على نقطتي ح د فاذا وجدناه وفتح البركار بذلك  
ادنا به ايضا من الجهة الاخرى على مثله فيكون مثلا كدائرة

يرد ونسبي هذه الدوير دوائر الطول ثم يعرض كل كل واحد من قوسي  
 أمر حتم قسمًا واحد من اقسام القطر ونطلب واحد من اقسام القطر  
 ونطلب على خط هـ م مركز دائرة تمر بنقط ق م نة ق م فاد ا واحدناه وفتح البركار  
 بذلك ادربا به اقسام جهة الجنوب على مثله كد ايره لخط فيكون قطر لها  
 في الجنوب ونسبي هذه الدوائر دوائر العرض فاذا افعلنا ذلك لكل جنس ثم لنا  
 كل واحد من دوائر الطول والعرض مائة وثمانية وسبعين دائرة  
 سوي خطي ا ب هـ وخط د ا ب هـ واحد ثم ينجي الى كل كوكب من التي  
 درجاتها في اربعين اول الجمل والضر الموزل

فتأخذ بعد درجة من اول

الجمل وبعد مثله من نقطة الجمل

خط ا ب هـ بحيث انتهيا تكون درجته

ودائرة الطول المارة على تلك الدرجة

هي دائرة طوله ثم تأخذ بعد عرضه

وبعد مثله من درجته على دائرة طوله

من الاقسام التي قسمها عليها دوائر

العرض ان كان شمالياً فالى دون كان جنوبياً فالى ت فبحث بعد  
 العدد فتمتلك موضع ذلك الكوكب مسقط عليه في المثال تاماً فرضنا كوكباً بعده  
 من اول الجمل درجة واحدة وعرضه في الشمال درجة واحدة فعدنا من نقطة  
 ت الى قطر آه قسمًا واحد من اقسامه فانتبهنا الى نقطة ح فقلنا انه درجته  
 والالوية قوس على ح هي د ايره طوله ثم عدنا على دائرة طوله الى جهة د  
 وهو الشمال قسمًا واحد من اقسامه فانتبهنا الى ج فقلنا ان ج موضع  
 الكوكب المذكور وكذلك لو فرض لنا كوكب في قعر وعشرين درجة من العرض  
 وعرضه في الجنوب درجة واحدة عدنا مثل بعده من اول الجمل  
 وهو مائة وسبعة وعشرون درجة قسمًا من نقطة ت فكانا النقيضين  
 الى ت وهي درجته والدائرة المارة عليها هي دائرة طوله وعدد عليها

في جهة الجنوب اعني جهة ب مثل عرضه الي ف فقلنا انه موضع الكوكب  
المعرض ونكذلك نعمل لكل كوكب درجته فيما بين اول الحمل الى العذراء حتى  
تتم صورة النصف ونصوير على كل صورة صورة صورها التي تحوّلها  
على حسب ما يقع مواضع الكواكب من اعصابها ثم بعد دارة مثل  
هذه المثل لها ويعل عليها تلك الاعمال المذكورة ونعرضها للنصف  
الذي من اول برج الميزان الي اخر برج السمكة وبفرض فيها  
نقطة T اول الميزان ونقطة ح اخر السمكة وناخذ ابعاد  
درجات باقي الكواكب من اول الميزان ونعمل ما علمنا حتى نحصل لنا  
جميع الصور في دائرتين وان اردنا ان لا تنقطع الصور

نقطة الاعتدالين وهي الواقعة عند حواشي  
كلتا الدائرتين المذكورتين فاما نعمل مع هاتين الدائرتين دائرتين  
اخرتين نجعل في احدهما نقطة T اول برج السرطان وناخذ  
ابعاد درجات الكواكب من اول السرطان وفي الاخر نقطة T  
اول الجدي وناخذ ابعاد درجات الكواكب من اول الجدي  
قسم منها ما يقع في الصورتين الاولتين ويتعرف اعطام  
الكواكب ما ذكر في الكتب فيكون ما ينقطه على مواضعها بحسب  
اقدارها بعد ان يفرض اعطام تلك النقط متوالية الاختلاف  
متناسبة التزايد فاما من جهتها فتعطي اصباعا شبيهة بالوان  
الكواكب السائرة ثم يبرج منها لكل كوكب حسب ما ذكر من  
من جهتها ويطلى عند الفراع ما يقع بينها من المواضع الخالية الا انه  
تشبيها بالوان المذكورة الذي يري على مسامحة علمت البصر  
محو الفلك ويكون تصويرنا الصور فوق الا ان نورد بالبياض الانعراج  
ليكون اظهر لحسن البصر فاذا فرغنا ذلك حصل لنا المطلوب  
على اقرب ما يكون من الطرق باذن الله تعالى ومشيئته ومن  
الصناع من عمل الى العساب ويؤثره على الطرق الصناعية

متناسبة

ع

مع وجدنا عليه صناع الاسطرلابات والآلات  
فلذلك ينقل ما ذكرناه الى طرق الحساب ونرشد الى معرفة مقاييس  
اقطار الدوائر وابعاد مراكزها من مركز الدائرة المفضضة ومجاورات  
الخطوط محيطاتها فتعبد دائرة  $ا ب ح د$  على مركزه  $ه$  بقطر  $ا ه د$   
 $ب ه د$  ونفرض فيه دائرة  $ب ط د$  من دوائر الطول وليكن  
مركزها نقطة  $ز$  ونصل  $ز ه$  تقاطع المحيط على نقطة  $ح$  ونربط  $ا ب$   
نعرف  $ط ز$  الذي هو نصف قطر الدائرة التي منها  $ب ط د$  وهو الذي هو  
بعد ما بين مركز تلك الدائرة ودائرة  $ا ب ح د$  فلان كل واحد من  $ه ط$   
 $ط ز$  معلوم اذ هو معروف ومسطح  $ط ه$  في مجموع  $ه ز$  مساو لمخرج  
 $ه ب$  فانا اذا قسمنا ثمانية الاف ومايه اعني مربع  $ه ب$  على  $ه ط$  خرج  
مجموع  $ه ز$   $ر ط$  فاذا زدنا على الخارج من القسمة  $ه ط$  اخضع قطر دائرة  
الطول واذا زدنا نصف  $ه ط$  على نصف مخرج من القسمة حصل  $ه ز$   
الذي هو بعد ما بين المركزين فاما معرفة المجاز اعني بعد ما بين نقطتي  
 $ا ح$  فانا نزل عمود  $ح ك$  فلان مسطح  $ا ب$  في  $ز ح$  مساو لمسطح  $ز ب$  في  $ز ح$   
يكون سعة  $ا ب$  الى  $ز ح$  كنسبة  $ز ب$  الى  $ز ح$  فهي ضربنا  $ا ب$  وهو فضل ما بين  
تسعين جزءا وبين بعد ما بين المركزين في  $ز ح$  الذي هو في الصورة  
مجموع  $ا ب$  الى ما به وثمانين جزءا وفي الصورة الثانية ما به وثمانون  
مفصوفا منها  $ا ب$  وضربنا المجموع على نصف قطر دائرة الطول خرج  $ز ح$  وهو  
المحفوظ ونسبة  $ز ح$  الى  $ح ك$  كنسبة  $ز ب$  الى  $ب ه$  فيخرج  $ز ح$  الذي هو المحفوظ  
في تسعين الذي هو  $ه ب$  ويعتبر المجموع على  $ز ب$  الذي هو نصف قطر دائرة  
الطول فيخرج  $ه ك$  الذي هو جيب  $ا ح$  المطلوب لكن هذه الخطوط والجيوب  
والاقطار التي خرج لنا هي بالمقدار الذي به نصف قطر دائرة التي تسعون  
جزءا فيجب ان نحول هذا الجيب الى المقدار الذي به نصف قطر هذه الدائرة  
سنون جزءا احدي اذا قوسنا في جداول الجيوب خرج قوس  $ا ح$  وذلك  
بان ينقص منه ثلثه او تقربه ادا في ربعين دقيقة فيتحول الى المقدار

الستيني وهذه القوس التي هي قوس الجازا عني العرج يكون إلى  
 جهة متى كانت نقطة خارج الدائرة ويكون إلى جهة د  
 متى كانت نقطة ر داخلها ومعرفة وقوع نقطة د بقياس  
 ما بين المركزين إلى نصف قطر دائرة أ ب د ان كانا ساويين  
 كانت نقطة د منطقة علي نقطة آ فكانت قوس الجاز  
 ثلاثية وان كان بعد أكثر من تسعين اعني  
 آه كانت نقطة د خارج وان كانت اقل من تسعين كانت  
 نقطة د داخل الدائرة ومعلوم انما متى استخرجنا ك الدوائر  
 الواقعة في نصف دائرة

كنا قد عرفنا من نصف دائرة  
 فبني الآن إلى دوائر العرض  
 ونريد ان نعلم فيها ما عليا  
 ونريد دائرة أ ب د و  
 فيها قطعة دائرة مطل من  
 دوائر العرض ونريد  
 ان نعلم فيها ما عليا  
 في دوائر الطول ولكن

مركزها فبصل آ د وينزل عمود م ق حيث قوس  
 م د و م جيب تمامها اعني آ م وهما معلومان من جداول  
 الجيوب اذ اردنا على كل واحد منها نصفه او ضربناه في تسعين  
 دقيقة ابدأ نحول من المقدار الستيني إلى المقدار التسعيني  
 واذا كان سة فهذا المقدار معلوما واسقطنا ص ط  
 بقي ط س في مجموع سر ر ط ما ولربح م س فاذا ضمنا  
 مربع م س على ط س خرج عمود سر ر ط فاذا زدنا نصف  
 ط س على المجموع سر ر ط اجتمع ط ر وهو نصف قطر  
 دائرة العرض واذا زدناه ط على ط س اجتمع ما بين

معلوماً ومطلوباً  
 ط س ص  
 نصف

المركزين

المركزين فاذا اردنا ان نعرف قوس حـ د التي هي الجاز فانا ندير  
 فيه ما دبرنا في دوائر الطول اعني ان نسبة د ح الى ر ك نسبة آر  
 الي ر ك فيكون حـ ك معلوما ونسبة حـ راح ك كنسبة دأ الي أة  
 فيصير حـ ك معلوما فيجوله الي المقدار السنيني وبقوسه فيجد اول  
 الجيوب فيخرج قوس حـ د ومهما عملنا هذه الاعمال لدوائر العرض  
 في نصف اذحة فكانا عملناها ايضا للنصف اب حـ د وذلك ما قصدنا  
 له ومراكز دوائر العرض تقع ابا خارج الدائرة من اجل اننا  
 متى اردنا اي دائرة من دوائر من دوائر العرض فرضنا  
 قطعة من خط دة شيئا نسبته الي خط دة كنسبة ما يقطع من قوس  
 دأ حـ الى ر ك دائرة وذلك يكون ابا انقص من كل واحد من  
 وري نيك القوسين فمقي كان مركز تلك الدائرة نقطة دـ  
 كان نصف قطرها هو وتر احدي نيك القوسين  
 فلم يربهاية القطعة الماخوذة من نصف قطرة دة بل جاورها  
 الي جهة نقطة دة ومتي مر عليها كان المركز واقعا بالضرورة  
 خارج الدائرة فاذا لم يمكن الامر في نقطة دـ فكـم بالحري لا يمكن  
 فيها هو داخل الدائرة وذلك  
 ما اردنا ان نبينه واسه  
 المستفاد ولنصوب  
 هذه الصور طرنا آخر  
 قريب ايضا وهو ان نقي  
 مسطرة مقسومة بمائة  
 وثمانين جزوا ونخط على  
 سطح مستوي مستقيم  
 ونقسم هذه الاقسام ثم نقدر في كرة مصورة الي كوكبين  
 من كواكب صورة ما رايها في السماء كوكب ثالث حتى يصير من

ابعاد ما بينها مثلك ونعرف مقدار تلك الأبعاد بأن  
نوضع على كل كوكبين منها حرف حلقة من حلق الكره  
العظام ثم يؤخذ مقدارها من المسطرة بالبركار ونخط  
منها على السطح الممروض مثلك ثم يؤخذ في الكرة كوكبان  
ويقاس إلى الكوكبين من كواكب الثلث قسما من ذلك مثلثان  
ويعرف مقدار ضلعيه ويؤخذان من المسطرة بالبركار  
ونخط على تلك القاعدة المخطوطة في الثلث الاول مثلك من  
ديك المقدارين في جهتهما وكذلك نعمل حتى ناتي على الكواكب  
كلها حتى نصور كل الصور وليس في الكرة نقطة الاوتها  
منها مع نقطتين سواها مثلك فلم يتعد على العامل ما ذكرناه  
وايضا فلو طي في الكرة على مواضع الكواكب شيء يؤثر بالماصة ثم وضعت  
الكرة على السطح المقصود فيه التصوير ثم دحرجت عليه فحركة  
تنصل بالدوران ولا تزول عن الموضع واجتهد في ان يكون النجج  
عليه من جميع نواحيها بالسوا فان مواضع الكواكب تؤثر بها  
طلي عليها امثالها في السطح ومثي استعمل الفرق في هذا الاخير  
لم يكن بين ما يتحصل وبين الحقيقة الا ما بين مشي الجن الذي  
لا يجزأ وبين نفاثه والامر في تصوير كرة الارض بما عليها شكل  
ما ذكرناه في الكواكب حدودا للعدة بالعدة لا يخالف اما في كرة السماء  
فيحتاج فيه الى جداول الكواكب الثابتة وموضع المجرة من  
كتاب الجسطي او كتاب اليخمين الصوفي او زيج  
محمد بن جابر البتاني وامثال ذلك واما في كرة  
الارض فيحتاج الى ما في كتاب جغرافيا من دكتور  
الاطوال والعروض للبلاذ والقري والبحار والعيون  
والانهار والرمال والجبال والمعادن وما يقع من الانواع  
والانطاف وغير ذلك حتى يكون علمها في السطح نجس ذلك

جديد

وقد جرى



جرحهم محمدي الصور من الارض من اصحاب كتب المسالك والممالك  
 ان يكونوا البحار بالخرقة المستقيمة والمباة للجارية بالكهرسيم  
 والاسماخونية والرمال بالصفرة الزعفرانية والجلال البفسية  
 المنقوبة بالحجرة اليسيرة والبلاد المحمرة الزنجفونية على اشكال  
 مربعة والطرق بالغبرة وبالادكنية فليكن الاقتفاء بالاصطلاح  
 الواقع بينهم شبيها بما ذكرناه فان لم يتمكن من هذين الجنتين  
 من الكتب احقنا الي تولى عمل ما فيها اما ارصاد الكواكب فبدات  
 الخلق والالات المهمة لذلك واما ما على الارض فمعرفة الاطوال  
 والعروض لكل واحد من الطالب فيها وقد سبق لي مقالته في  
 صحيح ذلك وكيفية الطريق الي معرفة كل واحد منها لكن معرفة  
 تولى ذلك مما يحوج الي عمر طويل لم يجز به العادة للانسان والي  
 امرنا في اقطار الارض واموال تغرق في اقطارها سكاكها  
 والمرشحين منهم المواطاة في ذلك مع من ينفق من الحوادث الرمانية  
 وكل ما يجمع ذلك لشخص واحد من اشخاص البشر وخاصة في هذه  
 الادوار التي نحن فيها فلذلك يجب ان تقتصر على عمله القديما وبصرف  
 المهمة الي صحيح الشيء في الشيء مانع فيه التهمة بصوت ما يمكن من  
 التضييحات فان طالب الكل يصعب لكل والمريد بلوغ النهايات عاجز عن  
 ادراكها وجان على نفسه آفة ضياع العر واقساد الاجتهاد وخسران  
 الدخلة واوسط كل شيء محمود ومن طريق الافراط والتفريط بعيد والله  
 تعالى مدح الذين يستمعون القول فيتبعون احسنه جعلنا الله من  
 من يتبع رضاه ولا يتخذ الله هواه وكفانا مهم الدارين انه  
 علي ما يشاء قدير وهو عليم بذات الصدور  
 ثم كتاب تسليح الصور ونسطح  
 الكور ولحمد الله رب العالمين  
 وصلى الله على سيدنا محمد وعلى اله  
 وصحبه اجمعين وسلم  
 تسليما

22. Rasulev, A., "Abū'l-Rayhān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī, On Multiple Projections of Parts of Groups of Stars" (in Uzbek) in *Collection Dedicated to the 1000th Anniversary of the Birth of al-Bīrūnī*, (ed. U. I. Karimov and A. Irisov), Ūzbekistan SSR "Fan" Naisrātī, Tashkent, 1973, pp. 300-314.
23. Richardson, P. and Adler, R. K., *Map Projections* (Amsterdam: North-Holland, 1972).
24. Robinson, A. H., *Elements of Cartography* (2nd ed.), (New York: John Wiley and Sons, 1964).
25. Rohlin, H. S., *Map Projections*, (Great Britain: E. Arnold, 1969).
26. Rozenfel'd, B. A., Rozhanskaya, M., and Sokolovskaya, Z., *Abu-r-Rayhān al-Bīrūnī* (Russian) (Moscow: Akad. Nauk CCCP, 1973).
27. Sa'īdān, A. S., "Kitāb taṣṭīḥ al-quwar wa tabṭīḥ al-kawar li-Abī'l-Rayhān al-Bīrūnī", *Dirāsāt*, 4, (Amman: The Jordanian University, 1977), 7-22.
28. Sengin, F., *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Vol. 5: Mathematics and Vol. 6: Astronomy, (Leiden: E. J. Brill, 1975 and 1978).
29. Suter, H., "Über die Projektion der Sternbilder und der Länder von Al-Bīrūnī", *Abh. zur Gesch. der Naturwiss.*, Erlangen, 4 (1922), 79-93.
30. Tissot, M. A., "*Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*", (Paris: Gauthier-Villars, 1881).
31. Tooley, R. V., *Maps and Mapmakers*, (London: B.T. Batford, 1949).
32. Toomer, G. J., *Diodes on Burning Mirrors*, (Berlin: Springer - Verlag, 1976).
33. Wiedemann, E., *Aufsätze zur arabischen Wissenschaftsgeschichte*, Vols. I-II. (Hildesheim: Georg Olms, 1970).

## Bibliography

1. Ahmedov, A. and Rosenfel'd, B.A., "The Cartography - one of Birūnī's first essays to have reached us", (Russian) *Mathematics in the East in the Middle Ages*, (Tashkent: "Fan", 1978), pp. 127-153.
2. Al-Bīrūnī, Abū'l-Rayhān, *Inti'āb al-awjāh al-mumkina fī jan'at al-asjurlāb*, unpublished.
3. Al-Bīrūnī, Abū'l-Rayhān, *The Chronology of Ancient Nations* (tr. and ed. E. Sachau), (repr. Frankfurt: Minerva, 1969).
4. Al-Bīrūnī, Abū'l-Rayhān, *The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology*, (tr. R. R. Wright), (London: Luzac and Co., 1934).
5. Al-Bīrūnī, Abū'l-Rayhān, *The Determination of the Coordinates of Cities* (tr. J. Alf), (Beirut: American University of Beirut, 1967).
6. Craig, J. L., *Theory of Map Projections*, (Cairo, 1910).
7. Deets, C. H. and Adams, O. S., *Elements of Map Projection*, U. S. Coast and Geodetic Survey Special Publication No. 68, (repr. New York: Greenwood Press, 1969).
8. Driencourt, L. and Laborde, J., *Traité des Projections des Cartes Géographiques*, Fascicules I-IV, (Paris: Hermann et Cie., 1932).
9. Fiorini, M., *Proiezioni delle carte geografiche*, (Bologna, 1883).
10. Fiorini, M., "Le Proiezioni Cartografiche di Albiruni", *Bollettino Soc. Geog. Italiana*, Ser. III, 4 (1891).
11. Fischer, Jos. (ed.), *Claudii Ptolemaei Geographiae Codex Urbinae Graecus 82*, (Leyden: Brill-Leipzig: Harrassowitz, 1932).
12. Kennedy, E. S. and Hermeliak, H., "Transcription of Arabic Letters, in Geometrical Figures", *Journal of the American Oriental Society*, 82 (1962), 204.
13. Kennedy, E. S., *A Commentary upon Birūnī's Kitāb Tahdīd al-Amākin*, (Beirut: American University of Beirut, 1973).
14. Kennedy, E. S. and Yusuf 'Id, "A Letter of al-Bīrūnī: Ḥabash al-Ḥāshib's Analemma for the Qibla", *Historia Mathematica*, 1 (1974), 3-31.
15. King, D., Article "Qibla" in *Encyclopedia of Islam* (2nd Edition), Vol. III, (Leiden: E.J. Brill, 1979), pp. 83-88.
16. Luckey, P., "Beiträge zur Erforschung der islamischen Mathematik", *Orientalia*, 17 (1948), 490-510.
17. Maling, D. H. "The terminology of map projections", in *International Year-book of Cartography*, Vol. VIII (London: George Philip and Son Ltd., 1968), pp. 11-64.
18. Mzik, Hans V., (trans. and comm.), *Des Claudius Ptolemaei Einführung in die darstellende Erdkunde*, Teil I., (Wien, 1938).
19. Nallino, C. A., *Al-Battānī sive Albatennī Opus Astronomicum*, Part III (Textum Arabicum Continens), (Milan: U. Hoeplium, 1899).
20. Neugebauer, O., *A History of Ancient Mathematical Astronomy* (3 parts), (Berlin: Springer-Verlag, 1975).
21. Ptolemy, K., *The Almagest*, (ed. K. Manitius) Vol. I, (Leipzig: B. G. Teubner, 1963).

then the maxima are respectively  $26^{\circ}26'$ , 1.678 and 1.571, which are 81%, 94% and 100% of the corresponding maxima for the whole hemisphere. Even though these maxima occur at the boundary the corresponding numbers are not that much better for any reasonable extent of longitude within the map and the figures indicate there will be considerable distortions in shape. It is evident that, with respect to the first two indices,  $2\omega$  and  $(a)$ , al-Birūnī's "rolling" projection is rather better.

### Conclusions

We have shown that in this treatise, written sometime between 1004 and 1017, al-Birūnī added three new map projections to the already considerable store available to medieval Muslim cartographers. We have argued that the inspiration for the first of the new projections he describes came from Ptolemy's second projection and have presented data analyzing the two most important of his three new projections. Although these data show that, by almost any measure, the two projections yield rather large distortions it is a fact that both of them are in common use today, a fact which indicates how al-Birūnī's sure feeling for the subjects he investigated led him to important results.

## CHART I

The value of  $2\omega$ , the maximum distortion of an angle, at a given longitude ( $\lambda$ ) and latitude ( $\varphi$ ).

$\varphi$	$\lambda$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0°54'	3°31'	7°38'	12°56'	19° 3'	25°29'
15	0.22	1.26	4. 1	8. 1	13.13	19.16	25.51
30	1.30	2.43	5.21	9. 8	14. 4	19.56	26.26
45	3.23	4.40	7.24	10.57	15.30	21. 4	27.25
60	6. 2	7.20	10. 7	13.27	17.32	22.40	28.47
75	9.30	10.47	13.33	16.39	20.13	24.48	30.34
90	13.48	15. 3	17.45	20.37	23.36	27.31	32.47

The values of (a) the ratio of the longest to the shortest image of a unit vector at a given longitude ( $\lambda$ ) and latitude ( $\varphi$ ).

$\varphi$	$\lambda$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1.066	1.083	1.134	1.219	1.337	1.489	1.675
15	1.073	1.092	1.143	1.227	1.344	1.495	1.678
30	1.095	1.115	1.168	1.251	1.365	1.511	1.687
45	1.131	1.154	1.209	1.292	1.401	1.539	1.702
60	1.185	1.209	1.268	1.351	1.454	1.578	1.723
75	1.259	1.285	1.348	1.431	1.525	1.632	1.751
90	1.358	1.385	1.454	1.536	1.619	1.701	1.787

The values of  $\sigma$ , the distortion of area at a given longitude ( $\lambda$ ) and latitude ( $\varphi$ )

$\varphi$	$\lambda$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1.000	1.016	1.063	1.143	1.254	1.396	1.571
15	1.007	1.023	1.071	1.150	1.260	1.401	1.571
30	1.026	1.043	1.093	1.173	1.281	1.415	1.571
45	1.061	1.078	1.130	1.211	1.316	1.438	1.571
60	1.111	1.130	1.185	1.268	1.367	1.471	1.571
75	1.181	1.202	1.261	1.345	1.434	1.514	1.571
90	1.273	1.297	1.361	1.445	1.521	1.567	1.571

smooth surface onto another, [30]. Several good accounts of this theory exist, e. g. in [23, pp. 49-56] and [24, pp.324-29], of which we follow the latter, specialized to the case where one surface is a globe and the other a plane. Let  $(\varphi, \lambda)$  be the geographical coordinates of a point on the globe and  $(\Phi, \Lambda)$  the image of this point on the plane. Locally the mapping induces a mapping from the plane tangent to the globe at  $(\varphi, \lambda)$  onto the image plane. Taking a small circle, of unit radius, about  $(\varphi, \lambda)$  in the tangent plane, Tissot showed that there is a unique pair of orthogonal diameters (called the "principal tangents") of this circle which are mapped to orthogonal straight lines through  $(\Phi, \Lambda)$  in the image plane. Let  $2a$  and  $2b$  denote the lengths of these images, with  $a \geq b$ . If a point traverses the circumference of the small circle about  $(\varphi, \lambda)$  its image in the plane traces out an ellipse whose center is  $(\Phi, \Lambda)$  and whose principal semi-axes have lengths  $a$  and  $b$  respectively. This ellipse is called *Tissot's indicatrix* and two perpendicular radii of the small circle map onto two conjugate semidiameters of the indicatrix. It then follows from the properties of conjugate diameters that if  $\alpha, \beta$  denote the local scales along the images of a parallel and a meridian passing through  $(\Phi, \Lambda)$  then  $\alpha^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2$  and  $ab = \alpha\beta \sin \gamma$  where  $\gamma$  is the angle between the images of the parallel and the meridian. We may solve these equations for  $a$  and  $b$  by showing first that  $\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 = 1 - d^2$ , where  $d = \frac{2\alpha\beta \sin \gamma}{\alpha^2 + \beta^2}$ . Then setting

$k = b/a$  we find  $k^2 = \frac{1-c}{1+c}$ , where  $c = \sqrt{1-d^2}$  and finally, solving this for  $k$  and simplifying we find  $k = 1/d - \sqrt{(1/d)^2 - 1}$ . Having found  $k = (b/a)$  we may use  $ab = \alpha\beta \sin \gamma$  to calculate  $b = \sqrt{\frac{b}{a} \cdot ba}$  and then  $a = k^{-1} \cdot b$ . When

these have been calculated it is easy to calculate  $2\omega$ , the maximum variation of an angle  $U$  whose vertex is at  $(\varphi, \lambda)$ , by the rule  $\sin \omega = (a-b)/(a+b)$ , and the local distortion ratio of areas, which is equal to  $\alpha\beta$ .

The calculation of these indices of distortion was done by L. Driencourt and J. Laborde in their monumental work, [8, fasc. II], and we reproduce parts of their Tableau XXXII as Chart 1. It is evident from these that the maximum distortion in angle ( $2\omega$ ) is  $32^\circ 47'$ , the maximum value of the ratio, at a given point, of the longest image of a unit vector to the length of the shortest image, ( $a$ ), is 1.787 and the maximum of the ratio measuring the distortion of area ( $\sigma$ ) is 1.571 (i.e.  $\pi/2$ ). For the stereographic projection the corresponding values are 0°, 2.0 and 4.0 while for the projection obtained by rolling the sphere along great circles passing through a point the maxima are, respectively,  $25^\circ 39'$ , 1.571 and 1.571. (These values may be found in Driencourt and Laborde [8, II, p.22].) Since al-Birūni definitely wanted to construct a map of the whole hemisphere these extreme values are relevant, but if we ask how good it is for the constellations lying near the ecliptic, say  $\varphi \leq 30^\circ$ ,

is of course well-known as one which maps angles on the sphere onto angles of equal size on the plane, though as Neugebauer says [20, p. 860] there seems to be no mention of this fact in the ancient or medieval literature on the astrolabe. However, this projection does not preserve the areas of figures and, while there are projections that do this, they do not preserve angles. The incompatibility of these two requirements is a consequence of the fact that a spherical surface cannot be applied to a plane without distortions, a proof of which is given in Craig [6].

This fact, that no mapping of the sphere onto the plane can preserve both angles and areas, is of considerable theoretical interest but, as a practical matter, there are many useful projections which preserve neither angles nor area (e. g. the orthographic and azimuthal equidistant) and the real task of the cartographer is to pick that projection which most nearly suits his purposes, whatever it may or may not preserve.

Al-Birūnī's requirements are fairly clear if we keep in mind his criticisms of the other projections he mentions: the projection must be one that is suited to representing a hemisphere, there must be no "crowding" in some parts of it, and it must represent the constellations, particularly the important ones along the zodiac, by shapes reasonably close to those which we see.

It is clear that his projection satisfies the first two requirements. The question is, how does it measure up to the third, that it not introduce too much distortion of the shapes of the constellations along the central portion of the sky? Al-Birūnī evidently thought it fulfilled this requirement reasonably well and it is quite possible that he actually constructed a map to satisfy himself on this point, even though he makes no mention of any construction in this work. In fact a considerable amount can be learned about this mapping simply by using a flexible ruler and protractor — for example, that circles of longitude (latitude) of constant difference divide a given circle of latitude (longitude) into arcs of constant length (though of course a different constant for each one), that the ratios to the length of the equator of the arc length of the parallels of latitude  $\varphi$ ,  $\varphi \leq 30^\circ$ , are very nearly  $\cos \varphi$  (for  $\varphi = 30^\circ$  the ratio is approximately .89 while  $\cos 30^\circ \approx .87$ ), and that the acute angles the meridians make with the parallels (which are right angles on the sphere) decrease with increasing latitude and longitude (for example for  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\lambda = 90^\circ$  the angle is about  $82^\circ$  while for  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\lambda = 90^\circ$  it has decreased to  $74^\circ$ ).

It is possible to make these somewhat rough measurements more precise by the calculation, for selected points on the map, of what cartographers call Tissot's indicatrix. Although the calculations which follow have little relevance to the time of al-Birūnī it may nevertheless be of interest to set al-Birūnī's mapping against modern criteria to see how it measures up.

In 1881 M. A. Tissot established a theory of cartographic mappings which yields a measurement of the local deformation of a particular mapping of one

that these intervals faithfully represent the distances between the corresponding parallels on the sphere and that each of the arcs faithfully represents  $180^\circ$  of arc at the given latitude relative to the length of the central meridian. For an arbitrary longitude  $\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 90^\circ$ ) one may use the scale on each of the three arcs to find the point corresponding to longitude  $\lambda$  (say east of the central meridian). These three points determine a unique circle and the part of that circle between the two external parallels (the northern and southern boundaries of the map) represents the meridian of longitude  $\lambda$  (east).

A modification of this procedure for someone who wanted to represent an entire hemisphere would be to let the northern and southern boundary arcs shrink to the poles and for the middle arc take the equator, represented now by a straight line bisected by the central meridian and divided according to the same scale as that meridian. The point corresponding to longitude on the equator determines, with the poles, a unique circle whose arc containing these three points represents the circle of longitude  $\lambda$ . As for the circles of latitude these, in Ptolemy's map, divide the central meridian into segments whose differences are equal to the differences in latitude. In al-Birūnī's map this property is made to hold not only for the central meridian but for the bounding semicircles of longitude  $\lambda - 90^\circ$  (east and west) as well, recognizing of course that the scale there will be larger than that on the central meridian by a factor of  $\pi/2$ . Again, for each parallel of latitude, this requirement defines three fixed points through which the curves representing parallels of latitude must pass so, borrowing the idea for the circles of longitude, al-Birūnī used circles for these curves as well.

Certainly al-Birūnī knew of Ptolemy's *Geography* for he refers to it in his treatise by way of introducing the mapping used by Marinus of Tyre. Further, that the Arabic version of the *Geography* contained Ptolemy's description of his mappings is likely since these are used in existing Arabic maps. (See the examples in the maps reproduced by Fischer, [11, *A et B\**].) Thus it seems that al-Birūnī knew of these mappings and, in light of the relationship we have described between his mapping and Ptolemy's second mapping, our conjecture that he devised his projection as a modification of Ptolemy's is a reasonable one. It is also likely that the reason al-Birūnī did not mention Ptolemy's mappings is that in this treatise he is only interested in mappings that will represent a full hemisphere, and manifestly Ptolemy's maps will not do that. Indeed it is our conjecture that it was precisely the need to represent a full hemisphere that led al-Birūnī to modify what Ptolemy calls the better of his two mappings and so to arrive at a map of a full hemisphere.

## 7. The Distortions in al-Birūnī's Mapping

It is, as al-Birūnī himself remarks, impossible to represent exactly the surface of a sphere on a plane. The stereographic projection used in the astrolabe,



Although Suter calculated the differences in the radii of the corresponding images, a better measure of the divergence between the two mappings is how far apart the corresponding circles get within the map. It is clear that this maximum occurs on  $AG$  or  $BD$  and we have calculated (see Fig. 5) the segment  $SR$ , which measures the distance between the points where al-Birūnī's image and the stereographic image of a circle of longitude  $GP = x$  (expressed in radian measure) cross the east-west line. Since the segment  $OS = \tan(x/2)$  and  $OR = 2x/\pi$  it fol-

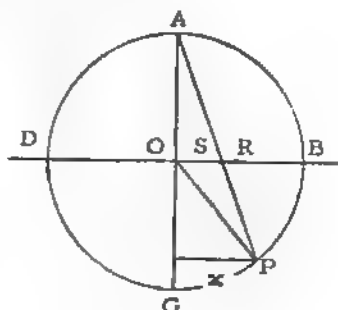


Fig. 5

lows that the segment  $SR = f(x) = 2x/\pi - \tan(x/2)$ . This function obtains a maximum when  $\cos^2(x/2) = \pi/4$ , i.e. when  $x = 2 \arccos \sqrt{\pi/4} \approx .96$ . This yields a maximum value for the function  $f$  of about .09. Thus the maximum difference between al-Birūnī's projection and the stereographic projection of circles of longitude is about 9% of the total radius and al-Birūnī's circles are pushed considerably towards the bounding circle as compared to the stereographic circles.

Further evidence that al-Birūnī would not have looked to the stereographic projection for inspiration for a good star map is given by his own words in the section describing map projections in the *Chronology*, [3, p. 357-8] He writes there, "But it is not the purpose of the astrolabe to represent them (the lines, circles, points on the globe) as agreeing with eye-sight . . . On the other hand, the purpose of the representation of the stars and countries (on even planes) is this, to make them correspond with their position in heaven and earth, so that in looking at them you may form an idea of their situation...". In view of al-Birūnī's clear perception of the different purposes of the astrolabic and cartographic projections it seems unlikely he would have looked to the former to find inspiration for the latter.

Our conjecture is that the projection al-Birūnī describes is in fact a simplification of the second conic projection that Ptolemy describes in his *Geography*. This second projection has been analyzed by Hopfner, [18, pp. 100-105] and, following him, by Neugebauer [20, pp. 883-885], where the reader may find a detailed description of Ptolemy's projection. For our purposes it suffices to say that Ptolemy's idea is to use three concentric circular arcs to represent three parallels of latitude and a straight line bisecting all three arcs to represent the central meridian. The two intervals between the arcs on the central meridian as well as the arcs themselves have lengths calculated to insure

21:20-21. The three sources of star tables mentioned here are the same as those mentioned in the *Chronology* [3, p. 358], though the warning given there about taking into account the amount of precession is not repeated here.

21:22. As Suter indicates [29, p.91] it is not certain whether the title *Geography* refers to Ptolemy's work or not.

21:26. The books on *masālik wa-mamālik* were works giving routes and distances between places, of use for postal authorities. The earliest known writer on the subject was Ibn Khordādhbeh, postmaster at Sāmarrā, who wrote, according to Suter's note on this point, around 845. Al-Bīrūnī in [5, p. 14] speaks of "the method of al-Jaihānī and others in their books on *al-masālik*". In his commentary on this work [13, p.3] E. S. Kennedy identifies al-Jaihānī as Abū 'Abdallāh Muḥammad b. Ahmad al-Jaihānī who flourished perhaps around 920. These books had a long tradition and Ḥājī Khalīfa, who died in 1657/58, lists in his bibliographical lexicon the *ʿilm masālik al-mamālik*, referring it to the results of geography (see E. Wiedemann [33, II, pp.459-60]).

21:27. The coloring of maps seems to go back at least to the very earliest Arabic maps, for Wiedemann [33, I, pp.66-67] in a note quotes from Mas'ūdī as follows; "In Ptolemy's *Geography* the seas are represented with different colors and are distinguished according to size and form . . . but their names are, in this work, Greek and therefore difficult to understand". This last phrase does not necessarily mean he had seen a Greek map but only an Arabic copy with the Greek names transliterated, hence still "Greek".

22:3-4. The Arabic here, (*maqāla fī taṣḥīḥ*), exactly fits the beginning of the title given as II.4 in al-Bīrūnī's list of his own works, translated by E. Wiedemann [33, II, P.492], namely *Eine Abhandlung über die Verbesserung (Richtigstellung) der Länge und Breite für die bewohnten Orte der Erde*. We know of no existing copies of this treatise.

## 6. The Source of al-Bīrūnī's Projection

In his commentary Suter made the suggestion that al-Bīrūnī's projection "ist eine abgeänderte oder vereinfachte stereographische Projektion" [29, pp.92-3] and made some sample calculations of the radii of the images of the circle of latitude of  $60^\circ$ , under the assumption that the radius of the sphere is 1. He found that the image in al-Bīrūnī's projection has radius .725 while that of the stereographic projection has image .577. The corresponding figures for the circle of longitude  $60^\circ$  are 1.08 and 1.15. In fact the percentage differences (26% and -6 %) seem to us rather large and a slightly different analysis shows how far al-Bīrūnī's projection is from a stereographic projection.

where the author reminds us that not only  $A/B \cdot C$  but  $A$  is equal to  $X$  and  $B$  to  $Y$ . The analysis now proceeds as follows, (see Figures 2 and 3). If  $HK \perp AE$  then (by Euclid III: 35,36)  $ZA \cdot ZG = BE \cdot ZH$  and so  $AZ \cdot ZG/BZ = ZH$ , where  $AZ = |ZE - 90|$  and, in the case of Figure 2,  $ZG = AZ + 180$ , while in the case of Figure 3,  $ZG = 180 - AZ$ . Then  $ZH:HK = ZB:BE$  and so  $ZH \cdot (90 - BE) / (ZB - R) = HK = \sin_{90} AH$ . Hence  $\sin_{90} AH = \sin_{90} AH - (1/3) \sin_{90} AH = 40' \sin_{90} AH$  and then  $AH = \text{arc } \sin_{90} (\sin_{90} AH)$ . Thus  $AH = \text{arc } \sin_{90} (40' \cdot ZH - 90/R)$ , which will be measured in the direction of  $B$  when  $Z$  is outside the given circle and in the direction of  $D$  when  $Z$  is inside. The first case will occur when  $ZE > 90$  and the second when  $ZE < 90$ , while when  $ZE = 90$ ,  $Z$  falls on  $A$ .

19:24-20:6. To find (see Fig. 4) the center of the circle of latitude,  $MTL$ , we drop ( $MS = \sin MD$ ) and note  $SE = \sin (90^\circ - MD) = \sin AM$ . Changing to a nonagesimal scale  $SE = (3/2) \sin_{90} AM$ ,  $SM = \frac{1}{2} \sin_{90} DM$ , and then  $TS = SE - TE$ . Letting  $R$  be the radius of the circle of latitude,  $MS^2 = TS \times (SZ + R)$  and so  $SZ + R = MS^2 / TS$  is known. Thus since we also know  $TS$  we may calculate  $R$  by the identity  $R = \frac{1}{2} TS + \frac{1}{2} (SZ + R)$ , while  $ET + R = EZ$  is the distance between the centers, again a formula not given in the *Chronology*.

20:7-20:12. As al-Biruni remarks, the calculation of  $HD$  for the circles of latitude is exactly the same as calculating  $AH$  for the circles of longitude, so it requires no further comment, although he goes into it in detail both here and in the *Chronology* (p.364).

20:13-19. To complete his calculation of  $DH$  al-Biruni must show that the point  $H$  is always measured from  $D$  in the direction of  $A$ , i.e. that the centers of the circles of latitude lie outside the given circle. He first remarks that  $DT:DE = DM:90^\circ$ , which is the defining property of the points  $M$  and  $T$ . Then, he says,  $DM:90^\circ < \text{Crd } (DM): \text{Crd } 90^\circ$ , which is immediate from the general theorem used by Ptolemy in the *Almagest* [21, p. 33] saying that if  $\alpha$  and  $\beta$  are arcs of the same circle, with  $\alpha > \beta$ , then  $\text{Crd } \alpha : \text{Crd } \beta < \alpha : \beta$ . Thus, since  $90^\circ > DM$ ,  $DT:DE < \text{Crd } DM : \text{Crd } 90^\circ$  and since  $\text{Crd } 90^\circ > DE$  it follows that  $\text{Crd } DM > DT$ . This, as al-Biruni sees, immediately implies that no circle with center  $D$  could pass through both  $M$  and  $T$  and *a fortiori* (since the sum of two sides of a triangle is greater than the third) that no circle with center between  $D$  and  $E$  could pass through  $M$  and  $T$ .

21:1-21:11. It is possible that al-Biruni is recommending this method of projection only for a given constellation since he says that the two stars chosen as a base are to be from one constellation (21:3). For further comments on this projection see Section IV.

have said here "a plane surface bounded by straight lines" for he would presumably have known of Archimedes' result in the *Sphere and Cylinder* (I, Proposition 33) that any sphere has surface area equal to four times that of its great circle. However, even with this provision the reasoning is a bit loose since if the lack of a rational ratio of the given surface to a plane, rectilinear surface were the key to the difficulty then the difficulty would also be present for the surface of a cone, and that is not the case since it may be cut along one generator and laid out flat.

17:16-20. This suggestion of making a second pair of maps, in which the equinoxes are at the centers, does not occur in the *Chronology*.

17:21-23. The use of different sizes to represent the brilliancy of a star is referred to in the *Chronology* in connection with the melon-form projection.

17:24-25. The use of colors to represent the temperaments of the stars is not mentioned in the *Chronology*, but many *zifēs* had tables of the temperaments.

18:6-8. According to Luckey [16, p. 501], "al-Mahānī adds to the graphical solution of two of his problems a calculational solution introduced by the words: A procedure hereto through calculation (*bāb dhālik min al-ḥisāb* ... As is known Ptolemy in *The Analemma* sets the corresponding calculational (procedure) alongside the constructive procedure". Such a calculational procedure for the map would certainly be of some utility, for to construct the centers of the circles of longitude or latitude of low degrees by ruler and compass would lead to very flat intersections and a real problem with precision.

18:9-21. Given the circle  $ABGD$  (in Fig. 2) with radius  $EB = 90$  and a circle of longitude,  $DTB$ , with  $TE = \lambda$  ( $0 < \lambda < 90$ ) it is required to find  $TZ$  (the radius of the circle of longitude, which we denote by  $R$ ) and  $EZ$  the distance between the centers of the given circle and the circle of longitude. In the circle of longitude the chord  $BD$  is perpendicular to a diameter at  $E$ , dividing it into two parts  $\lambda$  and  $EZ + R$ . Hence  $\overline{EB}^2 = \lambda(EZ + R)$  and so  $8100/\lambda = EZ + R$ . Since  $EZ = R - \lambda$  adding  $\lambda$  to the quotient yields  $8100/\lambda + \lambda = 2R$ . Thus, though this is said only in the *Chronology* [3, p. 361] and not here,  $R = 8100/2\lambda + \lambda/2$ . Also, subtracting  $\lambda$  from this yields  $8100/2\lambda - \lambda/2 = EZ$ , the distance between the centers of the given circle and the circle of longitude  $\lambda$ , though the *Chronology* [p.361] states "we can dispense with the knowledge of the distance between the two centers".

19:1-17. Presumably al-Bīrūnī is interested in determining the arc  $AH$  because the line joining  $B$  and  $H$  will then intersect  $EA$  (extended if need be) in the center of the circle of longitude and so provide one more way to find these centers. In the following account of al-Bīrūnī's derivation of  $AH$ , notation like  $(A=X)/(B=Y) = C$  is used to reflect faithfully the Arabic text

11:13. Sezgin does not list any book by al-Birūnī having this title though al-Birūnī in [5, p.14] tells of making a large hemisphere 10 cubits in diameter to derive coordinates from distances.

12:11-19. Al-Battānī's crude method for finding the *qibla* has received ample comment in the modern literature on the subject, e.g. in King, [15], and there is no point in paraphrasing here al-Birūnī's description. In his forthcoming paper "Some Early Islamic Approximate Methods for Determining the *Qibla*", King points out that the value of the *qibla* obtained from a Marinus-type projection differs from that obtained by al-Battānī's method; so al-Birūnī must have been classifying them together only on the grounds that both represent meridians and latitudes by parallel straight lines.

13:4-15:11. This section, which follows the generalities introducing the treatise, is al-Birūnī's "review of the literature". In a previous section we discussed all the projections mentioned by al-Birūnī and we only add here that apart from the order and the concluding section on al-Šūfī's non-mathematical mapping the projections he mentions are the same as those discussed in the corresponding section of the *Chronology*, [3, pp.357-59]. The only differences are: (1) The discussion in the *Chronology* gives exact descriptions of the cylindrical and melon-form projections (through it does not use the phrase "melon-form") whereas the present treatise describes them mainly in terms of their defects and gives more historical detail on the "melon-form". (2) In the *Chronology* the 10th Century scientist Abū-Hāmid al-Šaghānī is named as the one who wrote on the projection of a sphere from a point on the axis but not a pole, described in (13:10-13) of this work. This must be al-Šaghānī's *K. fi kaṭṭiyat taṣṭiḥ al-kura 'alā saṭḥ al-aṣṭurlāb*, published in *Risā'lu muta-farriqa fi'l-hai'at li'l-mutaqaddamin wa-mu'asiri'l-Birūnī*, Hyderabad, 1948. (3) In the *Chronology* he speaks of the cylindrical projection as one "which I do not find mentioned by any former mathematician" whereas in this treatise he explicitly mentions al-Farghānī in (14:18) where he says, "As for the cylindrical projection it is what comes to mind from the abundance of drivel that al-Farghānī spewed forth on it ...". It would be tempting to see here further evidence that this was written after the *Chronology*, when he had learned of al-Farghānī's book. However in the *Chronology* he refers to "my book, which gives a complete representation of all possible methods of the construction of the astrolabe" and in this book, which can only be the *K. isti'āb al-wujūh al-mumkinat fi ṣan'at al-aṣṭurlāb*, he refers to al-Farghānī's book *al-Kāmil* (see the sections translated by Wiedemann and Frank [33, II, p. 522]). Thus since al-Birūnī had seen al-Farghānī's treatise when he wrote the *Chronology* the meaning of the sentence about the cylindrical projection not being "mentioned by any former mathematician" must be that the name "cylindrical projection" was coined by al-Birūnī. (15:1) Al-Birūnī ought to

been constructed on a scientific basis. Such a study could illuminate the questions of the influence of al-Bīrūnī's treatise as well as providing a case-study of the relation between theory and practice in medieval Arabic science.

### 5. Additional Commentary on the Text

A question that has occasioned some debate has been that of the date of composition of the treatise. The only internal clue is the preface which speaks with fulsome praise of the (unnamed) Khwārazmshāh, and Suter takes this to refer to the Khwārazmshāh Abū'l-'Abbās Ma'mūn whose patronage al-Bīrūnī enjoyed from about 1004-1017 A.D. In assuming Ma'mūn is the Khwārazmshāh intended Suter ignores the earlier Khwārazmshāh who was al-Bīrūnī's patron until he was overthrown in 995 A.D. Suter's other reason for supposing this treatise was written after the year 1000 A.D. is that while much of its contents can be found in the *Chronology* [3, pp. 357-64], published circa 1000 A.D., that book contains no reference to the present treatise, which must therefore have been written later. This argument, however, is unconvincing since it obviously cuts both ways.

On the other hand, Rozenfel'd, Rozhanskaya and Sokolovskaya in [26, p. 265] date the treatise to 995 A.D., but without giving any reasons. Thus it would have been written as late as possible (since al-Bīrūnī fled in 995) during the reign of the earlier Khwārazmshāh.

In fact it is not hard to decide between these two views on the basis of a remark in al-Bīrūnī's introduction to the section in the *Chronology* where he discusses his mapping. It is not just, as Suter says, because he makes no reference to this treatise in the *Chronology* but rather because he states positively in the *Chronology* [3, p. 357] that he does not know of "any special treatise on the subject (of star maps)". It is hardly possible that in writing these words at the age of twenty-seven he had entirely forgotten about a substantial treatise he had written at the age of twenty-two devoted entirely to the subject of star maps. On the other hand the treatise *Projection of the Constellations* makes no mention of its being a pioneer in this area and simply introduces the new map with the words, "Thus I say: If I want to copy the constellations on a flat plane...", (15:15-16).

Hence it seems fairly safe to suppose that the Khwārazmshāh to whom the treatise is dedicated is Abū'l-'Abbās Ma'mūn and that, the substance of the treatise being near at hand in his *Chronology*, al-Bīrūnī was able to add two new mappings, briefly described, to produce soon after 1004 A.D. a new treatise to dedicate to his new patron.

In the remainder of our commentary we discuss points raised in the text of this treatise, introducing each by the page and line number where it occurs. We have tried to give, along the way, a comparison of the present text with that of which it is an expanded version, namely the closing section of the *Chronology*.

distorted as one moves to the boundaries and the poles of the map, with the worst distortion occurring in the polar regions near the boundaries. (See Fig. 6). Al-Birūnī does not make any criticisms of this projection.

7. Projection by great-circle distances from two fixed points, 21-1-21-11. (This is the modern "doubly-equidistant" projection described in *DA*, pp. 176 and 202, where it is remarked [p. 202] that "apparently no map of this kind has ever been constructed") Again al-Birūnī does not criticize this mapping.

8. Projection by rolling a sphere on a tangent plane and forth through a fixed point, 21-12-21-17. (This is the azimuthal equidistant projection described in *DA*, p. 175 and is simply (3) of our list with the pole replaced by an arbitrary point. Equally spaced straight lines through the point represent the great circles through that point, so azimuths from that point are faithfully represented, and great circle distances from this point on the sphere are faithfully represented on these lines. *DA*, p. 175, names, G. Postel as inventor of this projection in 1581 but, as al-Birūnī's treatise shows, Postel was over 500 years too late to be credited with its invention. Prof. E. S. Kennedy has pointed out to us that this projection is very close to al-Birūnī's first projection, (6) of our list, in the sense that the lines representing meridians and parallels in this projection, while pretty clearly not circles, are very close to the corresponding circular arcs used by al-Birūnī in (6). Thus let  $\rho$  be the length of the radius vector  $\rightarrow$  from the center of the map to the curves of latitude or longitude  $45^\circ$ ,  $\rightarrow$  making an angle of  $30^\circ$  with the central meridian. Kennedy has communicated to us the results in the following table, where the calculations are made using 1 for the radius of the whole map.

	Globular Proj.	"Rolling Proj."	% Difference
45° Parallel	$\rho = .620$	$\rho = .608$	2.0
45° Meridian	$\rho = .693$	$\rho = .704$	-1.7

That the difference is so slight may be the reason why, in H. S. Roblin's *Map Projections* [25, pp. 46-48], the directions given for drawing the azimuthal equidistant projection, for a point on the equator, are in reality directions for drawing al-Birūnī's globular projection.) Al-Birūnī does not comment on the defects of his mapping.

For further details of the history of some of the above projections the reader should consult Fiorini, [9] and [10].

**Conclusions:** If we disregard the one non-mathematical projection of (5) it emerges that al-Birūnī was in possession of at least seven different mappings of the sphere on the plane, all admitting an exact mathematical description, and one of these, (2), admits an infinite number of variations. In addition, as we will argue later, he knew of the three mappings Ptolemy describes in the *Geography*, i.e. the two conical and the third, perspective, representation. This brings the total to ten different mappings with a wide variety of properties, which could have furnished a rich storehouse for Muslim cartographers of succeeding centuries. To what extent this store of mappings was in fact exploited awaits a survey of the surviving maps now housed in manuscript collections around the world, (for some references to these maps see Wiedemann, [33, I, p. 67] studying the projections used on those that appear to have

and straight lines through it project points on the sphere onto a plane, 13-8-13:20. (When the center of projection is on the sphere we have a stereographic projection, called "polar" in case the fixed point is a pole of the sphere and "meridional" in case the point is on the equator. See *DA*, pp. 37-38 and 157-58). In case the point of projection is not on the sphere but inside it or outside the point is one of the perspective projections which are discussed in detail in Driencourt and Laborde [8, Vol. I, pp. 102-107]. The case when the point is the center is the well-known gnomonic projection. Al-Birūnī objects that it does not well-represent the heavens as they appear to the eye and, in particular, it does not map equally-spaced circles to equally-spaced circles.

3. The melon-form projection (*mubattakh*) due to al-Kindī or al-Marwarrūdhī and described by al-Farghānī in his book *al-Kāmil*, 13 21-14 17. (This projection is described by Wiedemann and Frank in [33, II, pp. 524-25] and is called by modern cartographers the polar azimuthal equidistant projection. See *DA*, pp. 155-56 and p. 43. Meridians radiate in equally-spaced straight lines from a pole and parallels of latitude are represented by equally-spaced circles, concentric at the pole. Clearly azimuth at the pole and distance from the pole are faithfully represented, but nothing else is.) Unless we allow great widening of images the zodac will be sliced into two halves, and it is exactly in this region where the most important figures lie. However al-Birūnī disassociates himself from the severest critics of this projection and says he plans to write a treatise on it, though no treatise by him on this subject is known beyond a chapter in his *Thorough Treatment of All Possible Methods for Construction of the Astrolabe*, partially translated by Wiedemann and Frank in [33, II, pp. 522-532].

4. Cylindrical projection of the whole celestial sphere onto the plane of the equator or of any other postulated great circle, 14-18-14:26. This is described more thoroughly in *The Chronology* [3, pp. 357-8] where al-Birūnī makes it clear that a given star is projected from the sphere onto the foot of the perpendicular from the star to the assumed plane. (This is the modern orthographic projection as described in *DA*, p. 42. Though often used for the surface of the moon it is hardly a good visual representation of the celestial sphere as seen from the earth.) Al-Birūnī's two objections are that the practice of representing the whole sphere by this projection leads to a jumble of stars that "pile up on top of one another" and that stars near the circumference of the representing circle are very crowded together.

5. A method ascribed to al-Sūfī in which the stars are copied onto a piece of thin paper wrapped around the sphere which is then unwrapped to yield a map, 15 1-15:10. (This is the only non-mathematical projection mentioned by al-Birūnī and it has no counterpart in the modern literature. The nearest modern equivalent would be a polyconic projection, as in *DA*, pp. 29-30, in which the sections of the sphere between two parallels of latitude are replaced by frustums of cones, whose surfaces may then unwound onto a plane). Al-Birūnī correctly remarks that this method is, as a practical matter, not too bad for small areas of the globe.

6. The "circular" projection, in which meridians and parallels are represented by arcs of circles, 15-16-20:20. (This is called by modern writers the globular projection, or Nicolosi's projection, after Gian Battista Nicolosi who, as Fiorini pointed out in [10, p. 294], printed a map based on this projection in his *Erode Siculo* of 1660. The well-known English cartographer Aaron Arrowsmith printed maps of the world based on this projection in 1794, as is mentioned by Tooley in [31, p. 57]. According to *DA*, pp. 158-59, this globular projection is a "method of projection more frequently used [than the stereographic meridional projection] by geographers for representing hemispheres, though in the globular representation, nothing is correct except the gradation of the outer circle and the direction and graduation of the two diameters; distances and directions can neither be measured nor plotted. It is not a projection defined for the preservation of special properties, for it does not correspond with the surface of the sphere according to any law of cartographic interest, but is simply an arbitrary distribution of curves conveniently constructed". On p. 54 of this same source there is an illuminating comparison of a man's head drawn carefully onto a hemisphere in al-Birūnī's globular projection and then plotted, maintaining latitude and longitude, in orthographic, stereographic and Mercator's projections. In a later section we present a detailed study of the distortions inherent in al-Birūnī's projection, but suffice it to say here that scale, angles, and area are progressively more



here. Abū Sa'īd Aḥmad b. Muḥammad b. 'Abd al-Jalīl (al-Sijzī) (12:21 and 15:1) who died in 1024 A.D. was a geometer and astronomer whose astronomical works have not received study in modern times. Although a letter of al-Bīrūnī to al-Sijzī on Ḥabash al-Ḥasib's analemma for finding the *qibla* has been translated by E. S. Kennedy and Y. 'Id [14] al-Sijzī's own treatise on the subject of the *qibla* has not been found. Aḥū (Naṣr) Maṣṣūr 'Alī b. 'Irāq (12:21-22), a Khwarazmian prince and teacher of al-Bīrūnī who wrote important scientific works, was the author of a work on the *qibla* of which no copy is known. Abū Maḥmūd Ḥāmid b. al-Khiḍr al-Khujandī (12:22) was a major astronomer of the latter half of the 10th Century whose book on the *qibla* has not been found. Aḥū'l-'Abbās (Aḥmad b. Muḥammad b. Kathīr al-Farghānī) (13:21, 14:4 and 14:18) was active in the mathematical sciences during the middle third of the ninth century. The work al-Bīrūnī cites here has for its full title *The Complete (Book) on the Making of the Northern and Southern Astrolabe and their Explanation by Geometry and Arithmetic* and has been studied by E. Wiedemann and J. Frank. (Abū Yūsuf) Ya'qūb b. Ishāq (b. al-Ṣabbāḥ) al-Kindī (13:22) is the well-known ninth century Arab polymath who wrote, among numerous other works, the book cited here and probably titled, *The Book of the Construction of the Astrolabe* (see Sezgin [28, VI, p. 154]). In the second half of the ninth century lived ('Umar b. Muḥammad b.) Khālīd al-Marwarrūdhī (13:23). The lost work referred to here is probably his *Book of the Making of the Plane Astrolabe*. Who Ḥasan (14:1) was is not at all clear.

#### 4. Mappings Mentioned in the Text

This section contains a survey of the projections al-Bīrūnī mentions in the *K. taṣṣiḥ*. Since we have not taken into account the mappings described by al-Bīrūnī in [2] we make no claim that this is a complete catalogue, but provide this list only in order that the reader may have conveniently at hand some projections known to a scholar of such matters around the year 1000 A.D. For each projection we identify it by its description by al-Bīrūnī and the place in the text where it is mentioned, followed (in parentheses) by its modern name and a reference to a discussion of its properties in the modern literature. The abbreviation *DA* refers to the work of Deetz and Adams, *Elements of Map Projection*, [7]. The reader should however be aware that there is wide variation in modern usage in naming projections. For an attempt to put some order into the chaos see Maling, [17]. Finally we summarize al-Bīrūnī's objections to the projection. (We should add that we use the words "mapping" or "projection" interchangeably to denote any function from the surface of the sphere onto the plane.)

1. The projection of Marinus of Tyre as described by Ptolemy in his *Geography*, 11 20-12:9. (Modified cylindrical equal-spaced projection, *DA*, pp.31-33). This projection distorts lengths of latitudes and represents the (non-parallel) meridians by parallel lines.

2. The conical projections, where a point is taken on a diameter (possibly extended) of the sphere

17:5. *one hundred and seventy-nine degrees*. The text's *wa huwa mi'at wa sab'a darajat* is bracketed by Sa'īdān as a copyist's insertion and is, in any case, wrong.

21:5. *ḥarf ḥalqatin min ḥalaqi al-kurati al-'izām*. The text cannot support Suter's translation "... daß du an je zwei der Sterne ein biegsames Lineal (einen Papierstreifen) anlegst, das sich also an einen Großkreis der Kugel anschmiegen kann, ...", though the method Suter describes might be a convenient way to carry out what al-Bīrūnī asks.

21:16-17. *illā mā bayn muthabati al-jus' alladhi lā yatajazza' wa bayn nafātihi*. We infer from the context that the meaning of this phrase is that the deviation between the representation of the sphere by al-Bīrūnī's third method and the "true" sphere is so slight that any distinction between the two is of only theoretical interest and has no more practical importance than the issue of whether there are indivisible parts or not.

### 3. Biographical Commentary

For the persons mentioned in this treatise we provide some bio- and bibliographical information based primarily on the material in Sezgin, [28], which the reader may consult for further details. We provide the full name, as given by Sezgin, enclosing in parentheses those parts of the name not cited by al-Bīrūnī. Immediately following the name parentheses enclose the page and line numbers in this treatise where the person is mentioned. The information following this is, on the whole, restricted to what is known about the work to which al-Bīrūnī refers.

‘Uṭārid b. Muḥammad (al-Hāsiḥ), (11:3), was a mathematician and astronomer of whose life nothing is known. Besides two surviving works on burning mirrors (see Toomer [32, pp.20-21] for further details) and on stones he wrote several works, which have not survived, on astronomy, including the one cited here by al-Bīrūnī. (Abū Ḥafṣ) ‘Umar b. al-Farrukhān al-Ṭabarī (11:3), who seems to have flourished in the second half of the 8th Century, is known primarily as an astrologer. Abū’l-Ḥusayn (‘Abdu’l-Raḥmān b. ‘Umar b. Muḥammad b. Sahl) al-Šūfī (11:4, 15:1-2, 15:5 and 21:20) carried out careful studies of the positions of the fixed stars (903-986 A.D.). The work cited by al-Bīrūnī exists in numerous manuscript copies, three Persian translations (one by Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī) and two 19th Century French translations. (Claudius) Ptolemy (11:20), who is here cited as the author of the *Geography* (12:1 and, perhaps, 21:22), flourished in Alexandria around 135 A. D. and wrote *The Almagest*, which is cited in this treatise at 15:6 and 21:20. Marinus (of Tyre) (12:1) wrote on geography around 110 A.D. (Abū ‘Abd’allāh) Muḥammad b. Jābir (b. Sinān) al-Battānī (12:11 and 21:21) who died in 929, was the author of the *sjj* which has been edited and translated into Latin by C. A. Nallino. It is the section of this *sjj* on the *qibla* that al-Bīrūnī cites

translates this as "auch noch die Entfernung [von Mekka bis zum Beobachtungsort]" since that is not what al-Battānī did (see [19, pp. 206-7]) and al-Bīrūnī's words here do not imply this.

13:7. *mujassamāt nāqīṣa*. Suter's translation and explanation, "unvollkommener Körper (d.h. deren Grundflächen nicht Kegelschnitte, sondern unklassifizierte Kurven sind)" is a possible one but in the absence of other appearances of the phrase it is hard to be certain of what al-Bīrūnī intended by the word *nāqīṣa*, one of whose uses is to describe the ellipse in the phrase *qaf' nāqīṣ*, and so we cannot be sure of what projections al-Bīrūnī was referring to here.

13:23-14:1. *asturlāban mubattakhan*. With Suter we have preferred this reading to that of *mubattāhan*, chosen by Sa'idān. Suter does not cite al-Bīrūnī's own use of the phrase in the *Astrology*, "There is [among the types of astrolabes] the *mubattakh*, called so because the muqantarās and the zodiac circle are flattened into an elliptical form like a melon", [4, p.198].

14:1. There seems to be no reason to change the manuscript's reading of *wujida li-Hasan* to Sa'idān's *wayadnā lahu*.

14:1-2. *wa-aṣḥab hādhihi'l-ṣinā'a fihī farḡān immā mustamjin wa immā mustamhin iyyāhu*. Suter has read the two words *mustamjin* and *mustamhin* as if they referred to types of astrolabes, taking the root meaning of *majana* to be "thick" and noting the root according to dictionaries does not possess a tenth form. We prefer to take the root meaning of *majana* as "to scoff or mock" and both words as referring to the attitudes of the two parties the text mentions.

14:12. *tasṭiḥ al-mubattakh*. Here we have preferred Suter's reading *mubattakh* to Sa'idān's *mubattah*, for the objection al-Bīrūnī gives to this projection, namely that it cuts the ecliptic into two halves, is an objection that exactly fits the melon-shaped astrolabe as it is described in Wiedemann and Frank [33, II, pp. 524-5].

14:13 *li-itṭisā' al-ab'ād*: In changing the printed text's *al-infād* to *al-ab'ād* we are adopting the suggestion of Lutz Richter-Bernburg.

14:19. *al-asturlāb al-mubattakh*. In view of al-Bīrūnī's earlier remarks about al-Farghānī and the melon-form astrolabe we have preferred Suter's reading here to that of Sa'idān, *al-mubattah*.

16:4. *naṣṭubu*. In many cases we have read verbs as being in the first person plural rather than second person singular or the passive voice of the third person singular.

11:4. In his *Astrology* [4, p.86] al-Bīrūnī defines the *nau'* of a star as its heliacal rising and explains in his *Chronology* [3, p.339] that *nau'* is also the rising of a lunar station and that while the influence of its rising is called *bārīḥ* the influence of its setting is called again its *nau'*. A plural is *anwā'* and elsewhere in the *Chronology* [3, p.231] he refers to "all annual consecutive occurrences and also the meteorological and other qualities of the single days that experience has taught them (the Greeks and Syrians) in the long run of time, which are called *anwā'* and *bawārīḥ*". He also records Thābit b. Qurra's initial opinion that the *anwā'* occur "one and the same day" everywhere and hence could not be related to the (heliacal) rising or setting of stars.

12:1. 'an *mārinus*. Sa'īdān notes the Arabic text reads *farbīyūs* but his emendation to *mārinus* is certain (and Suter's reading, "Hipparchus", is wrong) in the light of Ptolemy's text, which does in fact ascribe the mapping to Marinos.

12-2-5. The transliterated text of Sa'īdān's edition reads (12:2) *mīn takhṣṣ khutūṣ muwāziyat li-khaṣṣ al-i'tidāl wa iqāmatihā* (3) *maqām dawā'ir al-'arḍ a'nī aflāk anṣāf al-naḥar wa takhṣṣ khutūṣ muwāziyat li-khaṣṣ* (4) *nisf al-naḥar* (MS has *li-khaṣṣ al-i'tidāl*) *wa iqāmatihā maqām dawā'ir al-ṭūl a'nī al-madārāt al-muwāziya li-mu'addal* (5) *al-naḥar*. Suter neatly cut the Gordian knot presented by this tangled passage by translating these lines, "von der Zeichnung der zum Äquator parallelen Kreise und der auf ihnen senkrecht stehenden Langenkreise". This certainly catches the mathematical import of the passage but is hardly an accurate translation, since *iqāmatihā maqām* means "to put them in place (of other things)", i.e. simply to substitute one thing for another, and Suter's attempt to translate it as if it referred to perpendiculars ignores its proper meaning. Even Sa'īdān's emendation is only a partial improvement since it leaves uncorrected the *dawā'ir al-'arḍ a'nī aflāk anṣāf al-naḥar* ("circles of latitude, i.e. the meridian circles") in line 3 and the equally contradictory *dawā'ir al-ṭūl a'nī al-madārāt al-muwāziya li-mu'addal al-naḥar* in the following part.

If we take the emendation Sa'īdān made and assume the copyist's eye transposed the two explanatory phrases, each beginning with *a'nī*, then the passage makes perfect sense and may be translated as we have in our translation, even though other emendations are possible.

12:6-8. To avoid assuming the text is corrupt in these lines as well we translate *al-ṭūl al-kullī* simply as "the whole length" (of the map, from east to west) and *al-'urḍ* as "the widths" (i.e. the lines measuring the width of this rectangular map, from north to south).

12:18-19. *fa istakhraja bihi ḥina'idhin miqdār bu'd samtihi*. Suter incorrectly

written a treatise on (4) the correction (*taḥḥiḥ*) of that and the nature of the methods for knowing everything sought about them, but knowledge that will accomplish (5) that requires a long life, which people usually do not have, and authority that penetrates (6) the regions of the earth and means to distribute among its inhabitants, especially those trained in it (geography), for agreement in (helping in) that (endeavor) despite (7) whatever contemporary events might occur. Seldom does (all) that combine in one person (8) and especially in our present circles, so it is better to concentrate on the work of the ancients (9) and to devote (our) endeavor to the emendation of one thing after another on which suspicion falls, with whatever kinds (10) of corrections are possible.

For he who seeks everything will fail at everything and he who aspires to the extremes is unable (11) to attain them and inflicts on himself the calamity of the loss of his life and the spoiling of the endeavor and the loss of treasure. (12) The mean of everything is praised and is far from the two extremes of overindulgence or neglect. (13) And God the Exalted commends those who listen to (His) teachings and who follow its best (doctrine). May God make us one of those who (14) follow His pleasure and do not take their own desire as their God. May He provide us with the necessities of the two worlds. He is able to do what He wants, and He (15) knows (our) secret thoughts.

(16) The book of the projection of the constellations and making spheres plane has finished. (17) Praise to God, Lord of the worlds. (18) And God's blessings on our master Muhammad (19) and on his family and all his companions (20) and may He grant (them) salvation.

## 2. Notes on the Translation

Title. . . *wa taḥḥiḥ al-kuwar*. Wiedemann and Frank [33, II, p.527] suggest that we should read "*taḥḥiḥ*" for "*taḥḥiḥ*", evidently seeing here a reference to the melon-form astrolabe (*al-aṣṣurūḥ al-mubattakh*) which appears in this treatise. There is however no textual evidence for such a reading and we prefer to read the title as Sa'idān has quite properly read it, *taḥḥiḥ*.

10:9. *hay'at al-aflāk*. The spheres (*aflāk*) are the eight concentric celestial spheres containing the seven planets and the fixed stars, with the earth at the center.

10:16-17. *fi'l-mawālīd wa-taḥāwiliḥā wa-taḥawil sinī'l-'ālam*. Al-Bīrūnī explains these phrases in his *Astrology* [4. Sec.249] where he writes that (1) a year is the return of the sun to the place where it was at its beginning, (2) a world-year (*sanat al-'ālam*) is the return of the sun to the first of Aries and (3) a nativity-year (*sanat al-mawālīd*) is the return of the sun to its position at the time of birth. He concludes "and it needs the knowledge of that by which the ascendant is deduced, for the ascendant ("of the time determined by the sun's return" - Wright) is the ascendant of the anniversary (*taḥawil*) of that year".

pass, and from these there is drawn on the assumed plane a triangle. Then (7) a subsequent star is taken on the sphere and it is compared to two of the three stars and a second triangle is made from that (8) and the measurements of its two sides are known and are taken from the ruler by the compass and there is drawn on that (9) base drawn in the first triangle a (another) triangle from those two quantities in their direction. Similarly, we construct (triangles) (10) until we finish all of the stars, so that the constellations are then represented on it (the plane). Moreover, on the sphere (11) each point forms with two other points a triangle so that what we mentioned (the procedure) will not trip up the workman.

(12) Also if he were to paint on the sphere on the places of the stars something that would leave a trace on that which touches it, then if the sphere is put (13) on the assumed plane in which the representation is to be and it is rolled on it with a circular movement (14) and it does not abandon the (original) place (i. e. always returns to it) and one takes care so that the rolling on it is in all (15) directions equally then the places of the stars would trace with what was painted on them their likenesses on the plane. (16) And when care is used in this last (method) there is nothing between what is obtained and the truth except what is between (17) conceding the part which cannot be divided and rejecting it.

(18) And the matter of representing what is on the terrestrial sphere is like what we mentioned about the stars, (19) point-by-point (and) there is no difference. As for the celestial sphere, tables of the fixed stars are needed for it (20) and the position of the Milky Way, from *The Almagest* or the book of Abū'l-Ḥusayn al-Šūfī or the *zīj* (21) of Muḥammad b. Jābir al-Battānī and such works. (22) As for the terrestrial sphere one needs the information on latitudes and longitudes of localities from the book *Geography* (23) and (the coordinates of) villages, seas, rivers, sands, mountains, mines, (24) the ascents and declivities that occur, and other things so that its construction in the plane will take (25) them into account.

(26) It has been customary for those authors of the books on routes and kingdoms who represent the earth (27) to color the seas pistachio-green, running waters with amber or sky-blue, (28) sands by saffron-yellow, the mountains with violet mixed with a little red, (29) the towns in square shapes, by cinnabar red, and the roads by a dust color or blackish. So let (30) the imitation by the agreement occurring between them (the real objects and their representations) be similar to what we mentioned.

(22.1) So if we are not able to get these two kinds of books we need to undertake the construction of their contents. (2) As for the observation of the stars it is by the armillary sphere and the instruments made for that (purpose) and as for things on the earth, (3) it is by the determination of the longitudes and latitudes of each (feature) sought on it and I have already



we multiply  $ZH$ , which we kept, (9) by ninety, which is  $BE$ , and the whole is divided by  $ZB$  which is the radius of the (10) circle of longitude, and then there results  $HK$  which is the sine of the sought  $AH$ .

(11) But these lines and sines and diameters which have been deduced for us are in a unit of which (12) the radius of the circle  $ABGD$  is ninety parts and it is necessary this be changed to the sine (13) in which the radius of this circle is sixty parts so that when we enter the arc in a table of sines (14)

there will result the arc  $AH$ , and that we accomplish by subtracting from it ( $HK$ ) its third or we multiply it always by forty minutes (15) and it changes to sexagesimal units. (16) And this arc, i. e.  $AH$ , which is the arc of the intercept, will be in the direction of  $B$  when (17) the point  $Z$  is outside the circle (Fig. 2) and it will be in the direction of  $D$  when the point  $Z$  is inside, (Fig. 3).

The knowledge (18) of the position of the point  $Z$  using the relation of the distance between the two centers to the radius of circle  $ABGD$ : If the two are (19) equal the point  $Z$  is on top of  $A$  and the arc of intersection disappears; but, if (20) the distance is greater than ninety, i. e.  $AE$ , the point  $Z$  is outside (21) the circle and if it is less than ninety the point  $Z$  is inside the circle. (22) And certainly when we have determined those circles falling in the half (circle)  $BGDE$  we know from these the half  $BADE$ .

(23) And so we now come to the circles of latitude and we repeat the circle  $ABGD$  (Fig. 4) in which is the section ( $MTL$ ) of the circle, (24) one of the circles of latitude, and we want to know about it what we know about the circle of longitude. Let (25) its center be  $Z$ , draw  $AH[Z]$  ( $D$ ) and drop a perpendicular  $MS$ , [the sine] ( $\text{baythu}$ ) of arc  $MD$ , and  $SE$  is the sine of its complement, (26) i. e.  $AM$ . And these two are known from the table of sines. We increase each one of them by (20:1) its half, or always take its product by ninety minutes, (so) it will change from a sexagesimal scale to (2) a nonagesimal scale. Then  $SE$  is known in this scale (of 90) and we take away  $ET$ .  $TS$  remains (3) (as) known. And the area,  $TS$  by the sum of  $SZ$  and  $ZT$ , is equal to the square of  $MS$ . So when we divide the square (4) of  $MS$  by  $TS$  there results the sum (of)  $SZ$  and  $ZT$ . And when we add half of  $TS$  to half the sum (of) (5)  $SZ$  and  $ZT$  it totals up to  $TZ$ , and it is the radius of the circle of latitude. And if we add  $ET$  to  $TZ$  it totals up to (6) the distance between the two centers.

(7) If, then, we want to know the arc  $HD$ , which is the intercept, we proceed

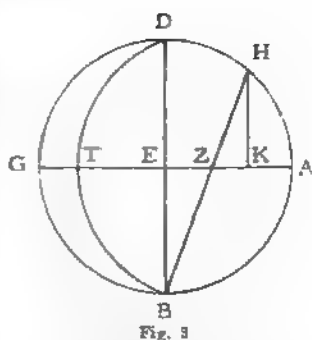


Fig. 3



struction on knowing the measurements of the sizes of the circles, the distances of their centers from the center (9) of the postulated circle, and the intercepts of the lines (radii of these circles) (with) its circumference (i.e.  $AH$ ).

(10) So once again we make a circle  $ABGD$  (Fig. 2) about the center  $E$  with two diameters  $AEC$  and  $BED$  and in it we put down (11) one of the circles of longitude,  $DTB$ . Let its center be the point  $Z$  and we draw  $BZ$ . It cuts (12) the circumference at the point  $H$  and we want to know  $TZ$ , the radius of the circle through (13)  $B$ ,  $T$ , (and)  $D$ , and  $EZ$  which is the distance between the center of that circle and of the circle  $ABGD$ .

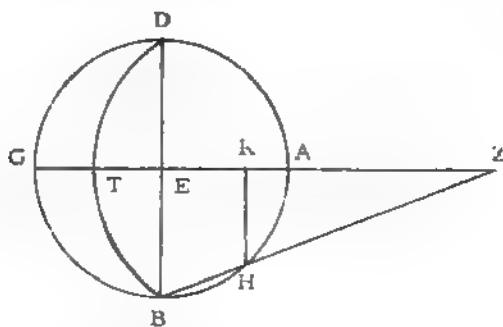


Fig. 2

(14) And so since each of  $ET$  and  $TG$  is known, because it is postulated, and the area,  $TE$  (15) by the sum of  $EZ$  and  $ZT$ , is equal to the square of  $EB$  so that when we divide the square of eight thousand one hundred, (16) i.e. the square of  $BE$ , by  $ET$ , there results the sum of  $EZ$  and  $ZT$ . So, if we add  $ET$  to the quotient (17) of the division it adds up to the diameter of the circle of longitude. When we subtract half of  $ET$  from half (18) of the quotient of the division,  $EZ$  is obtained, which is the distance between the centers.

(19:1) And as for the knowledge of the intercept, i.e. the (arc) distance between the two points  $A$  and  $H$ , we make the perpendicular (2)  $HK$ . (3) Thus, since the area  $AZ$  by  $ZG$  is equal to the area  $BZ$  by  $ZH$  the ratio of  $AZ$  to  $ZH$  will (4) be as the ratio of  $BZ$  to  $ZG$ . So when we multiply  $AZ$ , the excess of what is between the 90 parts (the radius) and the distance (5) between the two centers, by  $ZG$ , which is in the first picture (Fig.2) the sum of  $A [Z] (D)$  and one hundred (6) eighty parts and in the second picture (Fig.3) one hundred eighty from which  $AZ$  is lacking, and if we divide (7) the whole by the radius of the circle of longitude there results  $ZH$  and it is what is kept. (8) The ratio of  $ZH$  to  $HK$  is as the ratio of  $ZB$  to  $BE$  and so

equal to its distance from the beginning of Aries (one hundred and seventy-nine degrees) (6) dividing from the point *A*. And so we would end up at *Z* its degree, and the circle passing through it (7) is its circle of longitude. We count on it in a southerly direction, i.e. the direction of *B*, an (amount) equal to its latitude to *F* (8) and we say that it is the place of the assumed star. (9) And thus we do for each star whose degree is between the beginning of Aries and (the end of) Virgo so that (10) the copy of the half is completed. And we draw around each constellation its shape, which goes along with it, according to (11) what the locations of the stars making up its members necessitate.

(12) Then we repeat a circle like this one with which the representing (was done) and we make on it those constructions mentioned (13) and we assume it to be the half that is from the beginning of Libra to the end of Pisces and in it we assume (14) the point *A* as the beginning of Libra and the point *G* as the end of Pisces and we take the distances of the degrees of the remainder of the stars from (15) the beginning of Libra and we construct what we constructed (before) so that we obtain all of the constellations in two circles.

(16) And if we do not want the constellations to be chopped off at one of the two equinoctial points, which fall on the (17) edges of both of the two circles mentioned, then we draw, along with these two aforementioned circles, two other circles (19) in one of which we mark the point *A*, the beginning of the sign of Cancer, and we take the distances of the stars from the first (19) of Cancer, and in the other the point *A* is the first of Capricorn and we take the distances of the degrees of the stars from the first (20) of Capricorn and so out of these two we complete what is in the first two pictures.

(21) And the brilliancies of the stars are among what is mentioned in the (relevant) books so that will be what is indicated on their positions (22) according of their degrees (of brightness), after determining magnitudes suiting these points, in continuous succession (23) as befits the increase.

(24) And as for their temperaments we prepare pigments similar to the colors of the planets and then blend from these (colors) (25) for each planet according to what was mentioned of their temperaments and paint on the void, the empty spaces that remain between them, with *lapis* (18:1) *lazuli* similar to the bluish color seen in the heavens as far as the eye can see around (2) the celestial sphere. And our representation of the constellations will be over the *lapis lazuli* with white so that it will be (3) clearer to the sight. (4) When we have finished that we obtain what was sought as nearly as it can be from (these) methods. (5) God, the Exalted, permitting and willing.

(6) But some craftsmen incline to calculation and prefer it to constructive methods despite (7) all that we have found about it, (concerning the) methods of the maker of the astrolabe and instruments, and for that reason we will transfer what we mentioned to (8) methods of calculation and will give in-

the place of that star and a point is (made) on it (the place).

(25) And so in the illustration we have assumed a star whose distance from the beginning of Aries is one degree and whose latitude is (26) one degree north. Thus we have counted from the point *A* on the line *AEG* one division of (17:1) its divisions and we ended at the point *H*. And we said that this is its degree (of longitude) and the circle that passes through it (2) is the circle of its longitude. Then we counted on the circle of its longitude in the direction *D*, the north, one (3) of its divisions and we ended up at *O* and we say that *O* is the position of the star mentioned.

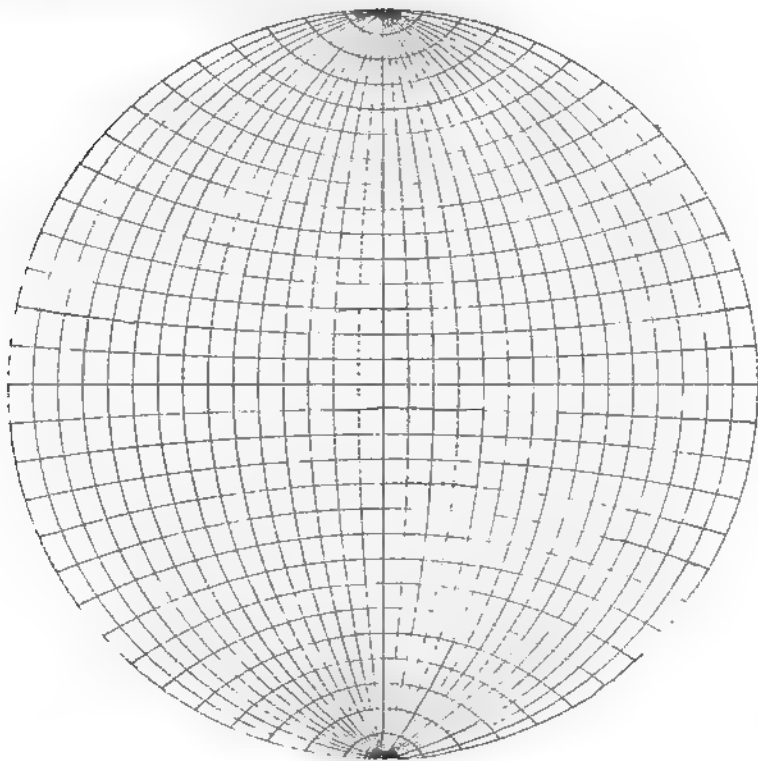


Fig. 6

(4) And similarly, if we had assumed a star at twenty-nine degrees of Virgo and its latitude in (5) the south one degree. We would count an (amount)

seek on each of the two lines  $EA$  (and)  $EC$  centers of circles (5) all of which pass through the two points  $B$  and  $D$  and through every [division of the divisions] (*quṭr min aqlār*) of the diameter. We also seek on (6) each of the two lines  $EB$  (and)  $ED$  centers of circles that pass part-by-part through the divisions of the diameter (7) and through the similarly numbered parts of the circumference of both sides.

(8) Thus in the illustration (Fig.1) we have made  $AH$  one division of the ninety divisions of  $AE$  and we seek on the line (9)  $EG$  the center of a circle that passes through the points  $B$ ,  $H$ , (and)  $D$ , and so when we have found it and have opened the compass that by (amount) we describe with it also (10) in the other direction a similar one so that it will be for example the circle  $BZD$ . These circles are called (11) circles of longitude.

(12) Then each of the two arcs  $AM$  and  $GS$  is assumed to be one of the parts (13) of the circumference (*quṭr*). We seek one of the parts of the diameter and we seek on the line  $ED$  the center of a circle that passes (14) through the points  $M$ ,  $N$ , (and)  $S$  and so when we have found it and opened the compass by that (amount) we draw with it also in the southern direction (15) (one) similar to it, such as  $LKT$  and it will be its [corresponding circle] (*quṭraiḥā*) in the south. These circles are called (16) circles of latitude.

(17) So when we have done that to each part we have completed each of the circles of longitude and of latitude, one hundred (18) seventy eight circles (for each direction) not counting the two lines  $AEG$  and  $BED$  and the two lines of the circle  $ABGD$ . (See Fig.6, not in treatise, constructed for intervals of  $6^\circ$ .)

(19) Then you set forth every star whose degrees (of longitude) are between the first of Aries and the last of Virgo, (20) so that you count one degree from the beginning of Aries, and their equal is counted from the point  $A$  on the line  $AEG$  so that where the end is (21) will be its degree (of longitude). The circle of longitude passing through that degree is the circle of its longitude. Then you take (22) the quantity of its latitude and you count its equal from its scale on the circle of its longitude, from the parts into which the circles of latitude divide it: (23) If to the north then towards  $D$  and if to the south then towards  $B$ . And where (24) the counting comes to an end there will be

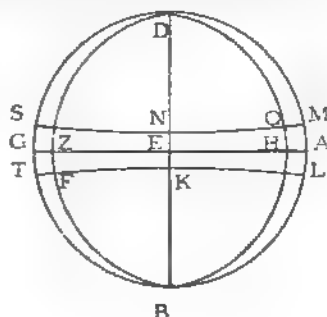


Fig. 1

or southern, and with it it is possible to project the stars of the celestial sphere in their entirety in the plane of (22) the celestial equator or in the plane of any postulated great circle. (23) However, the northern and southern constellations are assembled all together in it and pile up on top of one another, (24) and the stars near the circumference of the circle of the plane representation are very much cramped together and they vanish, so that (25) perhaps some northern and southern stars are considered to be one in the view of the eye. As for those opposite (26) the center of the circle of the plane of representation, distant from its diameter, their occurrence (in the plane) is nearer the truth.

(15:1) I have heard Abū Saʿīd Ahmad b. ʿAbd al-Jalīl (al-Sijzī) the geometer, say about Abū'l-Ḥusayn (2) al-Sūfī that he had placed thin paper on the sphere and wound it on its surface so that it fitted it (3) neatly on its surface. Then he drew the figures on it and indicated the stars in accordance with their appearance (4) on the transparency. And that is a (good) approximation when the figures are small but it is far (from good) if they are large.

(5) And he, i. e. Abū'l-Ḥusayn, claims in passages in his book, and for a number of the figures, that they (6) are seen in the sphere differently from what is seen in the heavens, and that is because of an error in the tables of *The Almagest* from which (7) the sphere was made. So by my life, when this slight error is on the sphere barely perceptible (8) to sight how much less would one recognize it on the flat plane which does not conform with the domed (9) neatly unless some places of it are bent, contorted and doubled over, and when it returns to its evenness the bent becomes planarized and the doubled becomes separated.

(11) And if all the cases mentioned are of such great difference between what is seen in the sphere and (12) in the plane it is incumbent on us to make some device with which to reconcile the two viewings (of the plane and sphere). (13) But if the discovery of a rational ratio between a straight line and a circular line is impossible (14) and similarly it (a rational ratio) is absent between a plane surface and a spherical surface we are prevented from making (15) that as it is in reality.

Thus I say: (16) if I want to represent the celestial constellations on a level plane then we describe around the center *E* (17) the circle *ABGD* for the half of the sphere which is from the beginning of the sign of Aries to the end of the sign of (18) Virgo and we quarter it with two diameters *AG* and *BD*. Let *A* be the beginning of Aries and *G* the end (16:1) of Virgo, *B* the south and *D* the north. We divide each of the four quarters of its circumference (2) into ninety equal parts and we also divide (each) of the four halves of the two diameters (3) into ninety equal parts. We produce these two diameters in their directions in a straight line outside (4) of the circle, indefinitely. We

them is not (17) according to the relationship of their distances in sight, unless the plane is tangent to the center of the constellation (18) intended (to be represented) and the vertices of the cones are beyond the tip of the diameter perpendicular to that plane, (19) and then the difference, in sight, is small, but whenever the constellation is closer to the vertex of the cone (20) the difference mentioned is more.

(21) It is possible to copy what is on the sphere onto the plane by another way, which Abū'l-'Abbās al-Farghānī attributed (22) in a number of manuscripts of his book called *The Complete* to Ya'qūb ibn Ishāq al-Kindī (23) and in a number of them to Khālid b. 'Abd al-Malik al-Marwarrūdhī. It is called (14:1) [melon-shaped] (mubattaḥ = flattened) and there is a short book of Ḥasan's on its making and the specialists in this art (2) are of two parties concerning it: either they scoff at it or they try it out. (3) As for those who scoff, they reject it fundamentally, so they refuse to have anything to do with the reply to its author and they are annoyed at him, (4) such as al-Farghānī. As for (the party) trying it, some claim the sphere may be imagined to be flattened at (5) one of the poles (and) cut at the other pole and some claim that between this astrolabe (6) and the projection mentioned there is nothing in common, but there came a flood of instruments for deriving the risings (7) and altitudes, such as the sun dials and others. (8) I am the third of these two parties, claiming about this astrolabe what I firmly believe, that it is a kind (9) of conical projection previously mentioned and I will make concerning its manufacture and demonstrations of (10) its validity a book later on if God, the Exalted, wills.

(11) But (for) now I say: (12) In the projection of the melon-shaped (astrolabe) only the representation of one of the two halves of the zodiac is possible, either (13) the northern or the southern, and the annexation of the other half to it is useless because of the wideness of the distances (14) every time you increase a little bit in the sphere, and overstepping the acceptable limit by its likeness in that. Then one must be content with (15) the representation of each of the two halves of the zodiac in a figure separately, and the greater the figures (16) with respect to advantage and the more of them in need of being seen, i. e. those running across the middle of the zodiac and (17) the celestial equator, it (the projection) cuts and divides into both of the two figures (the two separate representations of the northern and southern halves) and that is far from what is sought.

(18) As for the cylindrical projection, it is what comes to mind from the abundance of drivel that al-Farghānī spewed forth on it (19) at the end of his book on the refutation of the melon-form astrolabe, but I think that (20) I have beat him, and I have called it "the (cylindrical?) projection" for a reason that is out of place here. It is a kind of middle ground, (21) neither northern

the magnitude of the difference between the two latitudes -- in a southern direction if the latitude (13) of Mecca is less than the latitude of the locality and in a northerly direction if it is greater than it. From the endpoint he drew (15) the line of latitude parallel to the east-west line. Then he took from the extremity of the north-south line which was in the direction (16) of the line of latitude (just drawn) the magnitude of the difference between the two longitudes (and measured it along the circumference of the horizon circle) in the direction of Mecca from the locality. He drew from (17) the extremity the line of longitude parallel to the north-south line and he claimed that that (point) of the line of latitude (which) the line of longitude intercepts (18) is the place of Mecca in the horizon plane, and so with it he deduced then the magnitude of the distance (19) of its azimuth. (20) And that way of constructing the azimuth of the *qibla* is a gross error which all of the scholars accused him of in (21) their books on the azimuth of the *qibla*, e. g. Abū Sa'īd Ahmad b. Muḥammad b. 'Abd al-Jalīl ( al-Sijzī ), Abū Maṣṣūr 'Alī b. 'Irāq, and Abū Maḥmūd Hāmid b. al-Khiḍr al-Khujandī.

(13.1) That prompts me to establish principles with which one may attain the two representations, of the stars and constellations in the celestial sphere (2) and of the countries, mountains, seas, rivers and other features in the terrestrial globe, (3) that he may build on them (the principles) I have set forth by that (treatise) and not (need to) rely on anything else.

Thus I say: (4) It is known to those interested in astronomical instruments and their construction, and inquiring into their true facts, (5) after investigating the science of astronomy and grasping the full portion of geometry, that circles and points (6) on the sphere are not copied onto level surfaces other than by passing through them straight lines and the surfaces (7) of cones, right and inclined, and the surfaces of cylinders, and the surfaces of deficient solids (*al-mujassamāt al-nāqisa*). (8) As for straight lines and the surfaces of cones, it is (the projection) by which is set up the construction (9) of the astrolabe. With the variation of the position of the vertex of the cones and of the starting point of those lines in the two directions (10) of the north or south the astrolabe becomes two types, the northern and the southern, but with the variation (11) of their positions (i.e. the positions of the vertices of the cones) on the axis of the sphere either at the two poles of the sphere or outside of it on the extension of the axis (12) the circles copied on it [the plane] are of various kinds: thus in the plane they become straight lines and circles and species of (13) the three (sections): the hyperbola, the ellipse, and parabola. (14) And it is known, necessarily and clearly, that equally spaced circles on the sphere are projected in these (15) planes, either varying in distances but parallel to each other or varying in distances and not parallel, (i.e.) the same distances lessen (16) in some places and widen in others. When it is thus, the copy of

and did not remain in the same state; (8) rather, they deteriorated and became worthless even if the copy was by ruler and compass. Especially (is this so) since (9) the constellations in those books were isolated, set apart one from another (and) were not represented (10) in (their totality, so that one could make use of the nature of their (relative) positions in knowing and comprehending them, as well as of their occurrence in relationship (11) to each other.

And if someone wanted to copy the positions mentioned of these stars in the books (12) and tables composed for them onto given spheres of whatever substance, an imitation of them on the celestial sphere, (13) as I described in the *Book of the Making of the Sphere*, it would not depart from the imitated at all. (14) It would be an impression on the sight in (its) entirety with no isolation (of the separate parts). Now it is evidently impossible with (15) small spheres and possible with big ones, but the big ones are scarcely to be found, of great inconvenience in (16) transport and carrying, as well as in use and in practice. Thus the difficulty of that is in what corresponds to (17) the benefit in it, if it (the difficulty) does not surpass it (the benefit).

(18) As for copying these stars and their constellations onto the surfaces of flat planes, (19) what is difficult for spheres (transportation from place to place) becomes easy for these; but the matter of imitation in them takes the same course as (the other matter transportation) on spheres. Then I came across the book of Ptolemy on the figure of the earth, (12:1) called *Geography* and what he said in it on the authority of Marinus (*farībūs*) of instruction on representing (2) the figure of the earth on a plane, among the topics being the drawing of lines parallel to the east-west line and substituting them (3) for the circles of latitude, I mean the circles parallel to the equator (the meridian circles), as well as the drawing of lines parallel to the meridian line (the east-west line) and substituting them for the circles of longitude, I mean the meridian circles (the circles parallel to the equator). (5) He claims that (where) the circle of longitude of the place sought cuts the circle of latitude is its place (6) in the representing plane; but, it is not hidden to him who contemplates (the matter) that the total length, which is half a revolution (7) in every day-circle, (if) this place (is) in the vicinity of (either of) the two poles, be equal in magnitude to the terrestrial equator, (8) (and so) it has no similarity (to reality) such as that of the day-circles on the (model) sphere. Also the widths are found on parallel lines (9) while in reality they are found on nonparallel lines, that all meet at two points, and that is a contradiction.

(10) And it was thus that Muḥammad ibn Jābir al-Battānī showed it in his *siḥ* when he wanted to deduce the azimuth (11) of the *qibla* and the place of Mecca relative to the horizon plane. He took, from the end of the east-west [line] (plane) nearest (12) Mecca, on the circumference of the (horizon) circle,



so on. (14) As for the art of judgements (i.e. astrology) that informs us concerning the influence of the higher bodies on the lower bodies, (15) among the (things) clearly needed here is determining their magnitudes, their temperaments (*kaifiyat mizājīhā*), and their colors, (16) by direct sighting as well as their positions relative to the constellations which are used in nativities and their anniversaries and (17) world-year anniversaries and the ascendants of conjunctions and oppositions.

(18) It is also of no small advantage and profit in general knowledge, for example in knowing the times (19) of the year in advance of their changes, due to the succession of the seasons, and knowledge of natural conditions occurring almost regularly in the years (20) throughout time, relating to land and sea, to dryness, dampness (21) and in between, and those of them (natural conditions) found in the vapors (of the atmosphere), unvarying except in places and regions, (22) such as storms (*amwā'*) and strong winds (*bawāriḥ*) and the blazing hot days (*waqḍān*), and the cold (*hajrāt*), the great heat (*bawāḥir*), and the coldest (*Ayyām al-'ajūs*) days, and similar (means of identifying the seasons) (23) that are used by the Byzantines, Indians, and Arabs, also knowledge of the productive times, in which it is necessary to mate (24) animals, plant trees, and sow seed, since it (the result) differs in other (times) than these; as well as knowledge of the times (25) in which the seas become violent and are agitated and they become unnavigable.

Then, too, (there is) knowledge of the position of cities in the earth relative to each other, (26) of mountains, seas, and rivers and their bends, and the course of the shortest routes (27) and how to make them for the travels of armies (and) the sending forth of caravans. Also knowledge of the directions of places (28) from one to another, either for heading toward them or for facing their directions in accordance with the laws instituted in the books of God, (29) Who is Exalted, and the writings of His prophets, on them be peace, commanding (them) to face them (the places) as a duty (written) in the laws.

(11:1) Rarely is someone found who by sight is able to take in the knowledge of (all of) them (the stars) so that he points to each one of them as a sign to satisfy the questioner and guide (2) the student to certainty; rather, the most are those who rely in this matter on what the specialized books mention, (3) such as the book of 'Uṭārid b. Muḥammad on *The Astrologers' Profession*, the book of 'Umār b. al-Farrukhān al-Tabarī On (4) *the Representation of the Sphere*, the book of Abū'l-Ḥusayn al-Sūfī On *the Fixed Stars*, and the books of authors on the (5) *amwā'* limited to the teachings of the Arabs.

(6) Moreover it is certainly clear that those constellations represented in those books, even if their representation was true (7) and their accounts exact, changed with the succession of manuscripts and the multitude of copies,

Of the above writings we have had access only to the study by Fiorini, the translation by Suter and the text established by Sa'idān. Since Suter's translation is incomplete, only summarizing the text at certain points, and he devotes but a third of the one page of commentary to a study of the projections, we have written the present paper to give a complete translation of the scientific text as well as a mathematical study of the mappings al-Birūnī describes in it. Since these are some of the few new mappings of the sphere to be described since Ptolemy wrote his *Geography* almost 900 years earlier, there seems to be sufficient reason to study this treatise in detail.

### 1. Translation

Our translation is based on the Arabic text of the treatise as edited by A. Sa'idān [27]. (On difficult passages we have of course consulted Suter [29] and have followed him probably as often as we have departed from him.) Where we have altered the readings in this text we enclose the alteration in square brackets and supply a transliteration of the actual text in parentheses immediately following. Additionally, any material we have added by way of explanation is enclosed in parentheses. A short commentary on the translation supplies any additional remarks that cannot be conveniently inserted by brackets or parentheses in the translation itself. The notation  $(n:m)$  denotes the beginning of line  $m$  of page  $n$  of Sa'idān's edition of the text while  $(m)$  denotes the beginning of line  $m$ . We translate "jayb" by "sine", but the reader must remember that the medieval sine function, usually written  $\text{Sin}_R \Theta$ , is related to the modern by the rule  $\text{Sin}_R \Theta = R \sin \Theta$ , where  $R$  is the radius of the circle. When only one circle is under consideration we write simply  $\text{Sin} \Theta$ .

Since the Arabic MS of al-Birūnī's work lacks three diagrams we have, following Sa'idān, supplied these, and we have followed the system of Kennedy and Hermelink [12] in transcribing letters in the text referring to points of geometrical diagrams.

The translation follows:

(10:6) Acquaintance with the complete constellations comprising the observed stars, from among those with which the heaven is decorated (7) and which are made signs for those observing carefully the heavens and indications for those who wander on dry land or sea, is (8) of no little advantage or utility in both parts of the science of heavenly bodies. (9) As for the science of the form of the heavens, it concerns the stars, their motions, the practice of observations (in terms of) what is necessary (10) for taking their altitudes and the distances of what follows them, and in knowing the times at night when there is need of (11) determining them, in showing quantities of the movements and of the periods, past (12) and future, and the verification of returns in the eccentric orbits and the comparison of the rest (13) of the stars to them, and

# Al-Bīrūnī On Plane Maps of the Sphere

J. L. BERGGREN\*

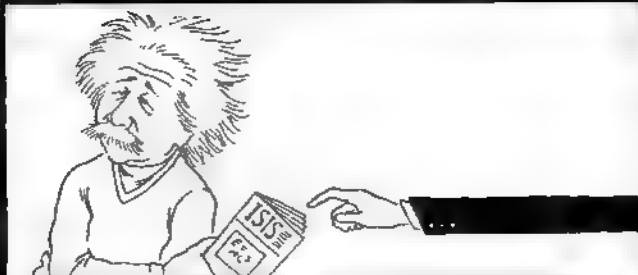
**D**URING HIS LONG LIFETIME Abū'l-Rayhān al-Bīrūnī (974-1048) wrote many works bearing witness to his learning and scientific imagination. One of these, the subject of the present paper, is his treatise on map projections, the *K. Taṣṭiḥ al-ḥuwar wa tabṭiḥ al-kunār*, (*The Book of the Projection of the Constellations and Making Spheres Plane*), which is preserved in Leyden as No. 15 of Cod. Or. 1068. Although this copy of the treatise is anonymous, al Bīrūnī lists it in his own index of his works under the heading of books "on instruments and their use" (see E. Wiedemann, [33, II, p.493]), and much of its contents may be found in the concluding pages of his *Chronology of Ancient Nations*, [3, pp.357-364]. Sezgin [28, V, p.381] reports a copy at Tehran.

The scientific text of *K. Taṣṭiḥ al-ḥuwar* was, apart from a few sections, translated into German by H. Suter in 1922, [29, pp. 79-93] with a brief commentary. More recently an Uzbek translation was published by A. Rasulov in 1973, [22] followed by a Russian translation by A. Ahmedov and B. A. Rozenfeld in 1978, [1]. In addition Sezgin [28, VI, p. 272] reports a Persian summary and study by Dānāsīrisht. Also, in 1977 A. Sa'īdan published an edition of the text [27], which was badly needed in view of Suter's report that "The manuscript was very carelessly done, it exhibits various gaps, it contains repetitions of sentences, unclear and incorrectly written words, diacritical points are often lacking or are incorrectly placed, and of the four figures the text contains only the first . . ." [29, p.79]. Finally we draw the reader's attention to the valuable historical study by M. Fiorini [10] of the use by Western cartographers of the projections al-Bīrūnī discusses at the end of *The Chronology*, projections also mentioned in the *K. taṣṭiḥ al-ḥuwar*.

\*Department of Mathematics, Simon Fraser University, Burnaby, B. C., Canada V5A 1S6.

It is a pleasure to acknowledge the assistance of several individuals and institutions in the preparation of this paper. First of all, Dr. A. Y. al-Hassan, past director of the Institute for the History of Arabic Science in Aleppo, Syria, provided office space and facilities for research during my stay there in the Fall of 1979. Professor E. S. Kennedy, of the same Institute, suggested the project to me and gave considerable help and encouragement in completing it while Miss Safa Msallati helped in translating several passages. Professor F. Ericksson of Chalmers Technical University in Gothenburg, Sweden, explained the elements of Tissot's theory to me and Professor C. Lämér of the same institution had their computer plotter draw the coordinate lines of the projection, shown in Fig. 6. Finally the National Sciences and Engineering Research Council of Canada provided generous financial help. To all of these, my sincere thanks.

## ARE YOU STILL READING SOMEONE ELSE'S COPY OF ISIS?



IF SO, now is the time to enter your own subscription. *Isis*, the official journal of the History of Science Society, is the leading journal in the field.

*Isis* keeps over 3000 subscribers in nearly fifty countries up to date on all developments in the history of science with articles, critiques, documents and translations. Along with these, its notes and correspondence and news of the profession provide useful information to professionals, educators, scholars and graduate students.

Lively essay reviews and over 200 book reviews a year cover every specialty in the history of science, technology and medicine, in addition to your four quarterly issues of *Isis* you still just receive.

Membership in the History of Science Society.

The annual *Critical Bibliography* listing over 3000 publications in the history of science, technology and medicine from the preceding year.

The *Triennial Guide* containing directories of members and scholarly programs and information on 50 journals in the field.

The quarterly *Newsletter* providing current news of the profession, including employment opportunities and approaching meetings.

# ISIS

Isis Publication Office  
University of Pennsylvania  
215 South 34th St / D6  
Philadelphia, Pa 19104

YES! Please send me *Isis* for the calendar year(s) \_\_\_\_\_ and \_\_\_\_\_  
\$22 for one year (\$13 for students). \$42 for two years (\$24 for students).

\_\_\_\_\_ Check enclosed \_\_\_\_\_ Bill me

(Issues sent on receipt of payment)

NAME \_\_\_\_\_

ADDRESS \_\_\_\_\_

- Tolsdan Tables** See *Toomer 1.*
- Toomer 1** G. J. Toomer, "A Survey of the Tolsdan Tables", *Osiris*, 15 (1968), 5-174.
- 2 -----, "The Solar Theory of az-Zarqāl: A History of Errors", *Cosmos*, 14 (1969), 306-336.
- Vernet 1** Juan Vernet Ginés, *Contribución al Estudio de la Labor Astronómica de Ibn al-Bannā* (Tetuan Editora Marroquí, 1951).
- 2 -----, "Los manuscritos astronómicos de Ibn al-Bannā", *Actes du VIII<sup>e</sup> Congrès International d'Histoire des Sciences*, (Florence, 1956), 297-298.
- al-Zarqālū** See *Mills and Toomer 2.*

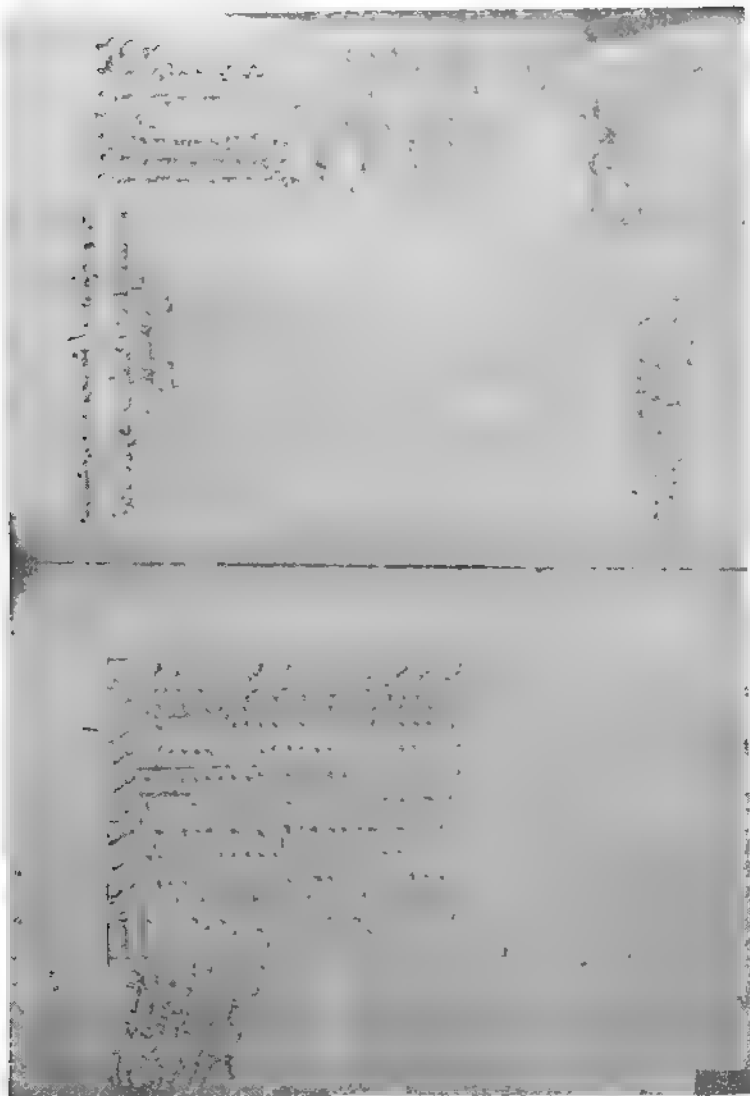
- 4 —————, "Al-Khwārizmī in Samaria", in press.
- 5 —————, "Ibn Abi 'l-Ridjāl", *Encyclopaedia of Islam*, 2nd edition (Leiden: Brill, 1979), vol. III p. 688.
- Price D. J. de Solla Price, "Mechanical Water Clocks of the 14th Century in Fez, Morocco," *Proceedings of the Tenth International Congress for the History of Science*, (Ithaca, 1963), pp. 599-602.
- Renaud 1 H. J. P. Renaud, "Additions et Corrections à Suter 'Die Mathematiker und Astronomen der Araber'", *Isis*, 18 (1932), 166-183.
- 2 —————, "Astronomie et Astrologie Marocaines", *Hespérie*, 29 (1942), 41-63.
- 3 —————, *Les Manuscrits Arabes de l'Escorial*, Tome II, Fasc. 3: *Sciences Exactes et Sciences Occultes*, (Paris: Paul Geuthner, 1941).
- 4 —————, "Quelques Constructeurs d'Astrolabes en Occident Musulman", *Isis*, 34 (1942), 20-23.
- 5 —————, "Ibn al-Bannā' de Marrakech - Šūfī et Mathématicien (XIII<sup>e</sup>-XIV<sup>e</sup> S. J.C.)", *Hespérie*, 25 (1933), 13-42.
- 6 —————, "L'Enseignement des sciences exactes et l'édition d'ouvrages scientifiques au Maroc avant l'occupation Européenne", *Archéon*, 13 (1931), 325-336, reprinted in *Hespérie*, 14 (1932), 78-89.
- 7 —————, "Un prétendu catalogue de la Bibliothèque de la Grande Mosquée de Fès", *Hespérie*, 18 (1934), 76-99.
- 8 —————, *La Calendrier d'Ibn al-Bannā' de Marrakech (1256-1331 J.C.)*, Publications de l'Institut des Hautes-Etudes Marocaines, tome XXXIV, (Paris: Larose Editeurs, 1946).
- Rosenthal P. Rosenthal, trans. and comm., *Ibn Khaldūn: the Muqaddimah*, 3 vols., 2nd ed., (Princeton: Princeton University Press, 1967).
- Samsé J. Samsé Moyá, "A propos de quelques manuscrits astronomiques des bibliothèques de Tunis ...", *Actas del Coloquio-Tunecino de Estudios Históricos*, (Madrid, 1973), pp. 171-190.
- Sédillot-fils L. A. Sédillot, "Mémoire sur les Instruments Astronomiques des Arabes", *Mémoires de l'Académie Royale des Inscriptions et Belles-Lettres de l'Institut de France*, 1 (1844), 1-229.
- Sédillot-père J.-J. Sédillot, *Traité des Instruments Astronomiques des Arabes Composés au Treizième Siècle par Aboul Hhassan Ali de Maroc*, 2 vols., (Paris: Imprimerie Royale, 1834-35).
- Sezgin F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, 7 vols. to date, (Leiden: E. J. Brill, 1967 to present).
- Suter 1 H. Suter, "Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke", *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, 10 (1900), and "Nachträge und Berichtigungen", *ibid.*, 14 (1902), 157-185.
- 2 —————, *Die astronomischen Tafeln des Muhammed ibn Mūsā al-Khwārizmī ...*, *Kgl. Danske Vidensk. Skrifte*, 7H.B., 1st. og filos. Afd. 3, 1, (Copenhagen, 1914).

- Janin** L. Janin, "Quelques aspects récents de la gnomonique tunisienne", *Revue de l'Occident Musulman et de la Méditerranée*, 24 (1977), 207-221.
- Kennedy 1** E. S. Kennedy, "A Survey of Islamic Astronomical Tables", *Transactions of the American Philosophical Society*, N. S. 46, Pt. 2, (Philadelphia, 1956).
- 2** ———, "The Astronomical Tables of Ibn al-A'ian", *Journal for the History of Arabic Sciences*, 1 (1977), 13-23.
- Kennedy & Janjanian** E. S. Kennedy and Martiros Janjanian, "The Crescent Visibility Table in al-Khwārizmī's Zij", *Centaurus*, 11 (1965), 73-78.
- Kennedy & Muruwawa** E. S. Kennedy and Ahmad Muruwawa, "Bīrūnī on the Solar Equation", *Journal of Near Eastern Studies*, 17 (1958), 112-121.
- al-Khwārizmī** See *Suter 2* and *Neugebauer 2*.
- King 1** D. A. King, "A Fourteenth-Century Tunisian Sundial for Regulating the Times of Muslim Prayer," in *Hertner Festschrift*, pp. 187-202.
- 2** ———, "Astronomical Timekeeping in Fourteenth-Century Syria", *Proceedings of the First International Symposium for the History of Arabic Sciences*, (Aleppo, 1976), pp. 75-84.
- 3** ———, "Three Sundials from Islamic Andalusia," *Journal for the History of Arabic Science*, 2 (1978), 358-392.
- 4** ———, "Early Islamic Astronomy (Review of Sagan, VI)", *Journal for the History of Astronomy*, 12 (1981), pp. 55-59.
- al-Marrākushī** See *Siddiq-pārs* and *filz*.
- Mayer** L. A. Mayer, *Islamic Astrolabists and Their Works* (Geneva: Ernst Kundig, 1956), and a supplement "Islamic Astrolabists. Some New Material", in R. Eittinghausen, ed., *Aus der Welt der Islamischen Kunst* (Berlin: Verlag Gebr. Mann, 1959), pp. 293-296.
- Millás** J. Millás Vallicrosa, *Estudios Sobre Azarquiel*, (Madrid, 1950).
- Nallino** *Al-Battani sive Albatenni Opus Astronomicum*, ed. and transl. by C. A. Nallino, 3 vols., (Milan, 1899-1907).
- Neugebauer 1** O. Neugebauer, "The Transmission of Planetary Theories in Ancient and Medieval Astronomy", *Scripta Mathematica*, 22 (1956), 165-192.
- 2** ———, *The Astronomical Tables of al-Khwārizmī*, Hist. Filol. Skr. Dans. Vid. Selsk. 4, no. 2, (Copenhagen, 1962).
- 3** ———, "Thābit ben Qurra 'On the Solar Year' and 'On the Motion of the Eighth Sphere'", *Proceedings of the American Philosophical Society*, 106 (1962), 264-299.
- Pingree 1** D. Pingree, "Indian Influence on Sasanian and Early Islamic Astronomy and Astrology", *The Journal of Oriental Research*, Madras, 34-35 (1964-66/1973), 118-126.
- 2** ———, "History of Mathematical Astronomy in India", *DSB*, vol. XV, Supplement 1, (1978), pp. 533-633.
- 3** ———, "The Indian and Pseudo-Indian Passages in Greek and Latin Astronomical and Astrological Texts", *Viator (Medieval and Renaissance Studies)*, 7 (1976), 141-195.

## Bibliography

- Asṣawī** A. Asṣawī, *Ta'rikh 'ilm al-falak fī l-'Irāq ... (= History of Astronomy in Iraq and its Relations with Islamic Arab Countries in the Times Following the Abbasid Era ...)*, Baghdad: al-Mayma' al-'ilmī al-'Irāqī, 1958).
- al-Battānī** See *Nallino*.
- Brioux & Maddison** A. Brioux and F. Maddison, *Repertoire des Facteurs d'Astrolabes et leurs Oeuvres*, Part I: *Islam*, to appear.
- Brockelmann** C. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Literatur*, 2 vols., 2nd. ed., (Leiden: E. J. Brill, 1943-49, and Supplementbände, 3 vols., Leiden: E. J. Brill, 1937-42).
- Burckhardt** J. J. Burckhardt, "Die mittleren Bewegungen der Planeten im Tafelwerk des Khwārizmī", *Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. Zürich*, 106 (1961), 212-231.
- Cairo Cat. & Survey** D. A. King, *A Catalogue of the Scientific Manuscripts in the Egyptian National Library* (in Arabic), 2 vols., Cairo: General Egyptian Book Organization, 1981-82, and *A Survey of the Scientific Manuscripts in the Egyptian National Library* (in English), to be published by the American Research Center in Egypt with Uadens Press.
- Colin & Renoud** G. S. Colin and H. P. J. Renoud, "Note sur le 'muwaqqit' marocain Abu Muqrī - on micra Abu Muqrī - al-Baṭṭīnī (XIII<sup>e</sup> s. J.-C.)", *Hesperus*, 25 (1933), 94-96.
- Djebbar** A. Djebbar, *Enseignement et Recherche Mathématiques Dans le Maghreb des XIII<sup>e</sup>-XIV<sup>e</sup> Siècles*, Publications Mathématiques d'Orsay, no. 81-02, (Orsay: Univ. de Paris-Sud, 1980).
- DSB** *Dictionary of Scientific Biography*, 14 vols. and 2 supplementary vols. to date, (New York: Charles Scribner's Sons, 1970 to present).
- Goldstein 1** B. R. Goldstein, "On the Theory of Trepidation according to Thābit b. Qurra and al-Zarqālū and its Implications for Homocentric Planetary Theory", *Centaurus*, 10 (1964), 232-247.
- \_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_, "The Hebrew Astronomical Tradition: New Sources", *Isis*, 72 (1981), 273-291.
- \_\_\_\_\_ 3 \_\_\_\_\_, *Ibn al-Muthannī's Commentary on the Astronomical Tables of al-Khawārizmī* (New Haven and London: Yale University Press, 1967).
- Gunther** R. T. Gunther, *The Astrolabes of the World*, 2 vols., (Oxford: University Press, 1932, reprinted London: The Holland Press, 1967).
- Hartner Festschrift** Y. Maeyama and W. G. Saltzer, eds., *Prismata: Naturwissenschaftsgeschichtliche Studien Festschrift für Willy Hartner*, (Wiesbaden: Franz Steiner, 1977).
- Ḥm al-Bannā'** See *Vernet 1* and 2; the MS of his *Zīj* used in this study is MS Ecceclia nr. 909,1.
- Irānī** R. A. K. Irānī, "Arabic Numeral Forms", *Centaurus*, 4 (1955), 1-12.





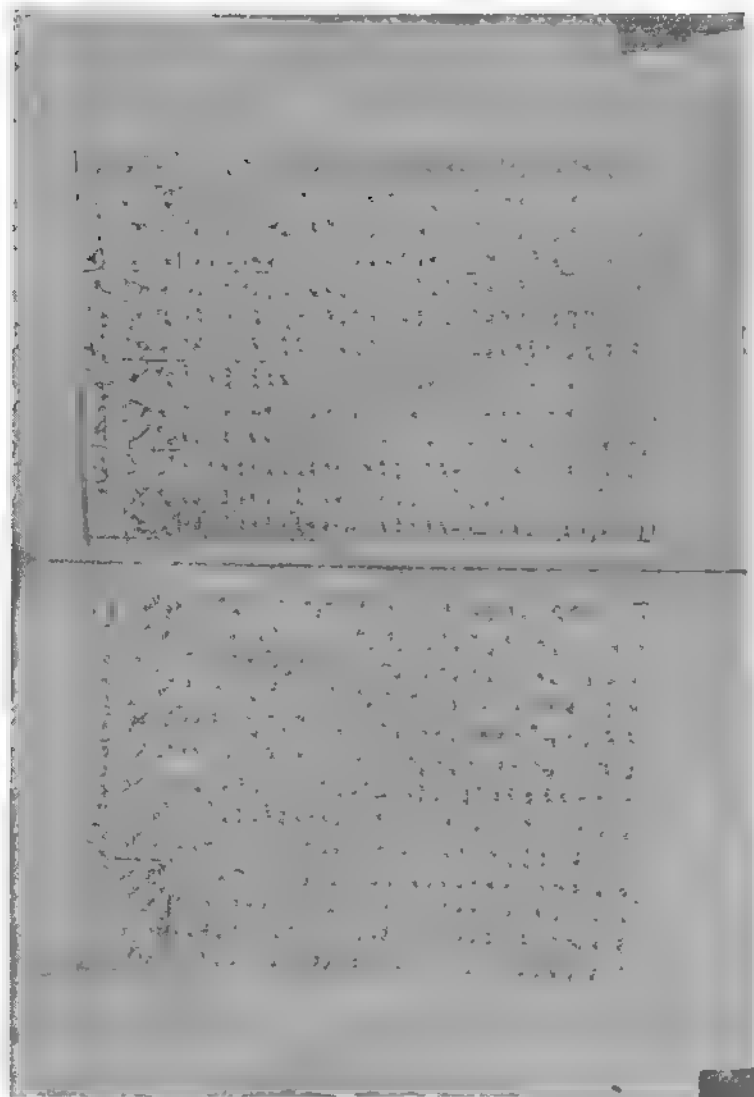
Escorial ar 909, ff. 63v, 64r.

1. The first part of the text is a list of names, each followed by a number in parentheses. The names are: John (1), James (2), William (3), Robert (4), Thomas (5), Richard (6), Henry (7), George (8), Edward (9), and Charles (10).

2. The second part of the text is a list of names, each followed by a number in parentheses. The names are: John (1), James (2), William (3), Robert (4), Thomas (5), Richard (6), Henry (7), George (8), Edward (9), and Charles (10).

*[Faint handwritten notes and mathematical symbols are visible across the page.]*

Escorial ex. 909, ff. 61v, 62r.



Escorial ar. 909, ff. 60v, 61r.

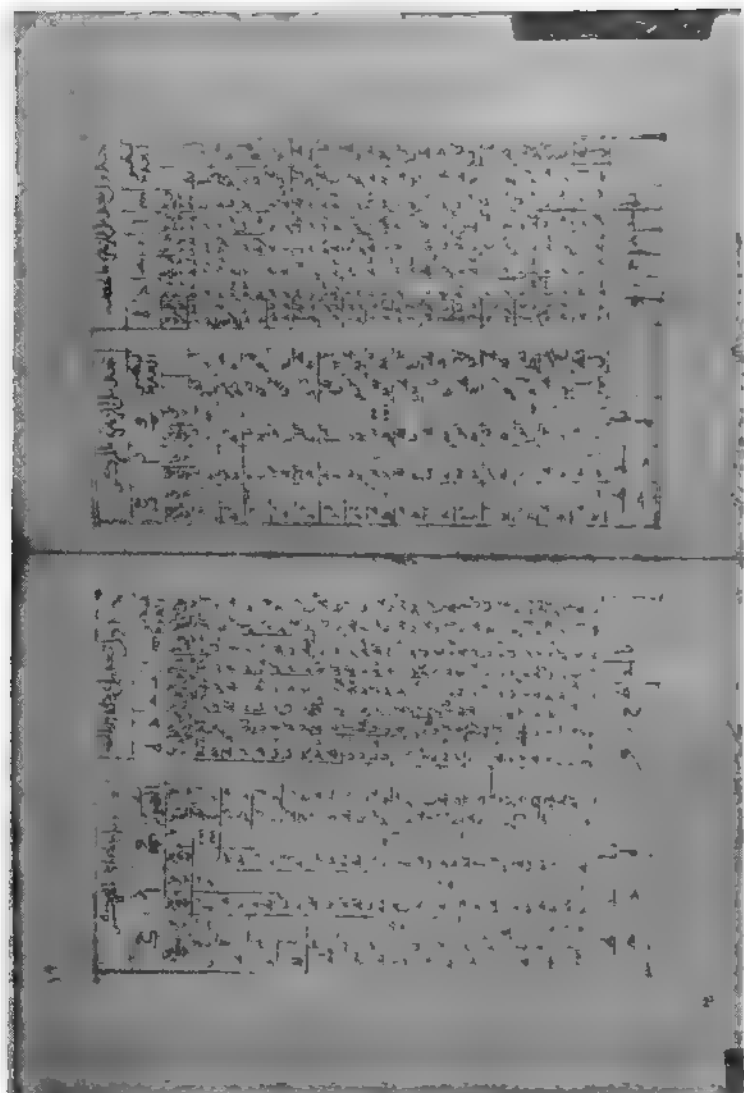
Handwritten text in Arabic script, likely a mathematical or astronomical treatise, featuring tables of numbers and symbols.

Top page (Folio 59v):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Bottom page (Folio 60r):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Escorial ar. 909, ff. 58v, 59r.

Handwritten text in Arabic script, organized into four distinct horizontal sections separated by lines. The script is dense and appears to be a technical or astronomical treatise.

Escorial ar. 909, ff 57v, 58r.

Handwritten text in Arabic script, likely a manuscript. The text is arranged in two columns, with the right column being the primary text and the left column containing marginalia or commentary. The script is dense and cursive, typical of medieval Islamic manuscripts.

Handwritten text in Arabic script, continuing the manuscript. The text is arranged in two columns, with the right column being the primary text and the left column containing marginalia or commentary. The script is dense and cursive, typical of medieval Islamic manuscripts.

Escorial ar. 909, ff. 56v, 57r.

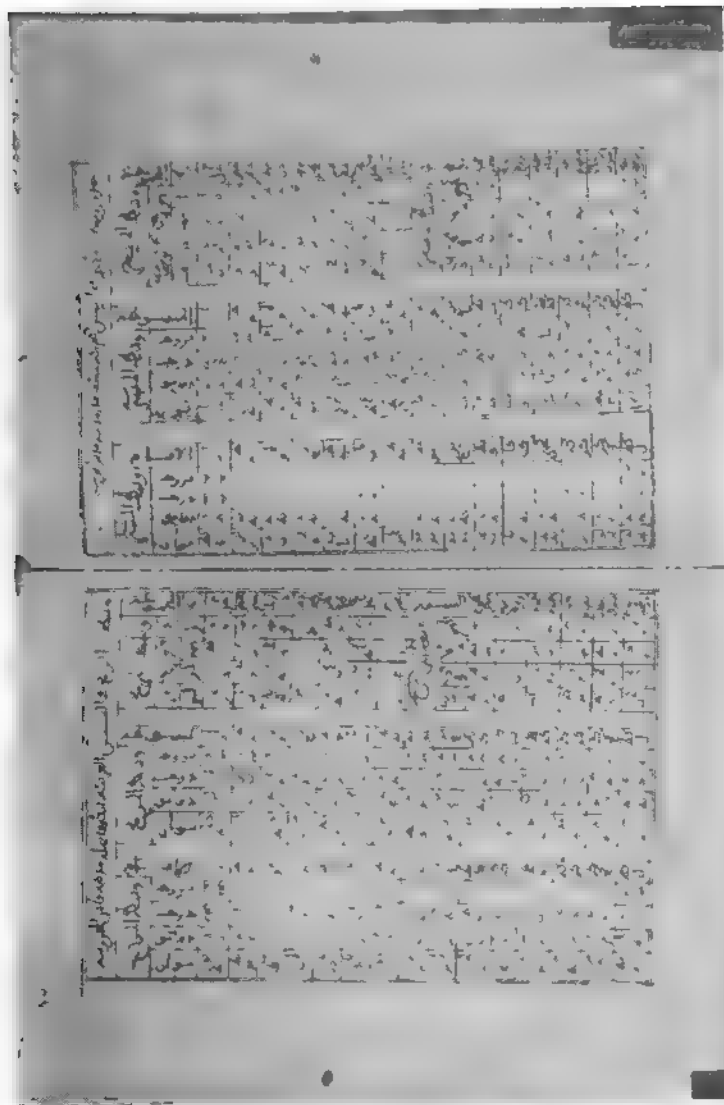


This image shows a page from an Arabic manuscript. The text is written in a dense, cursive script, characteristic of older Arabic handwriting. The page is filled with lines of text, with some lines being longer than others, creating a somewhat irregular layout. The ink is dark, and the paper appears aged and slightly discolored. The handwriting is very close together, making it difficult to read without expertise in the script.

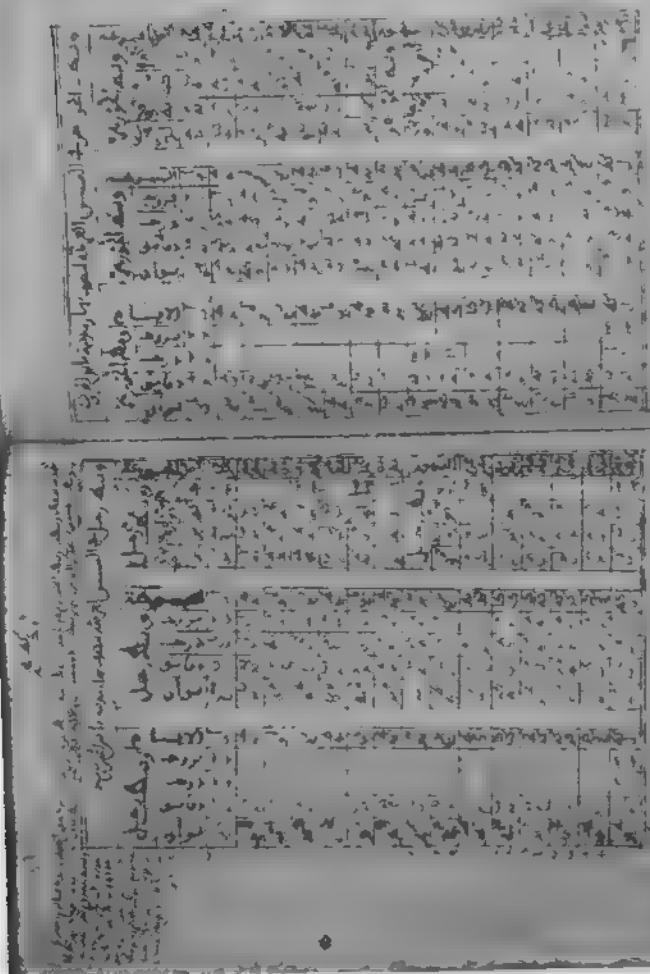
١٠  
 در عهد الامير ابوالفتح ابي الحسن الغفر  
 رحمه الله تعالى  
 في شهر ربيع الاول سنة ١٠٠٠  
 في يوم الاثنين  
 في شهر ربيع الاول سنة ١٠٠٠  
 في يوم الاثنين

Escorial ar. 909, ff 55v, 56r.

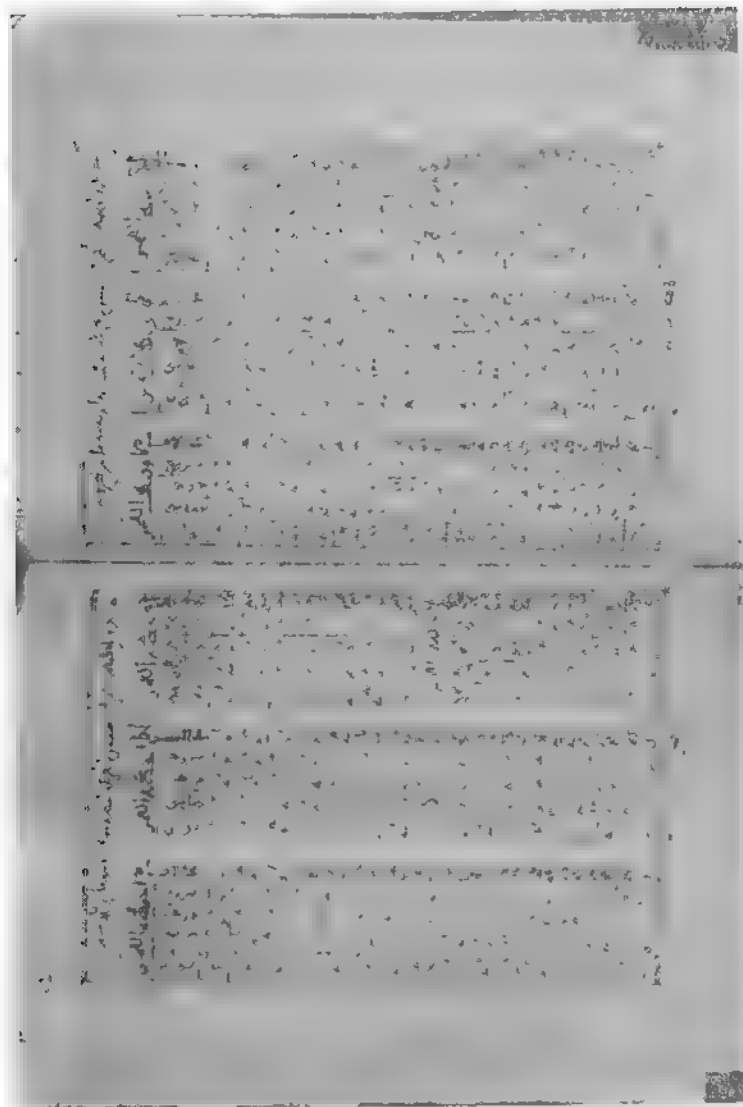




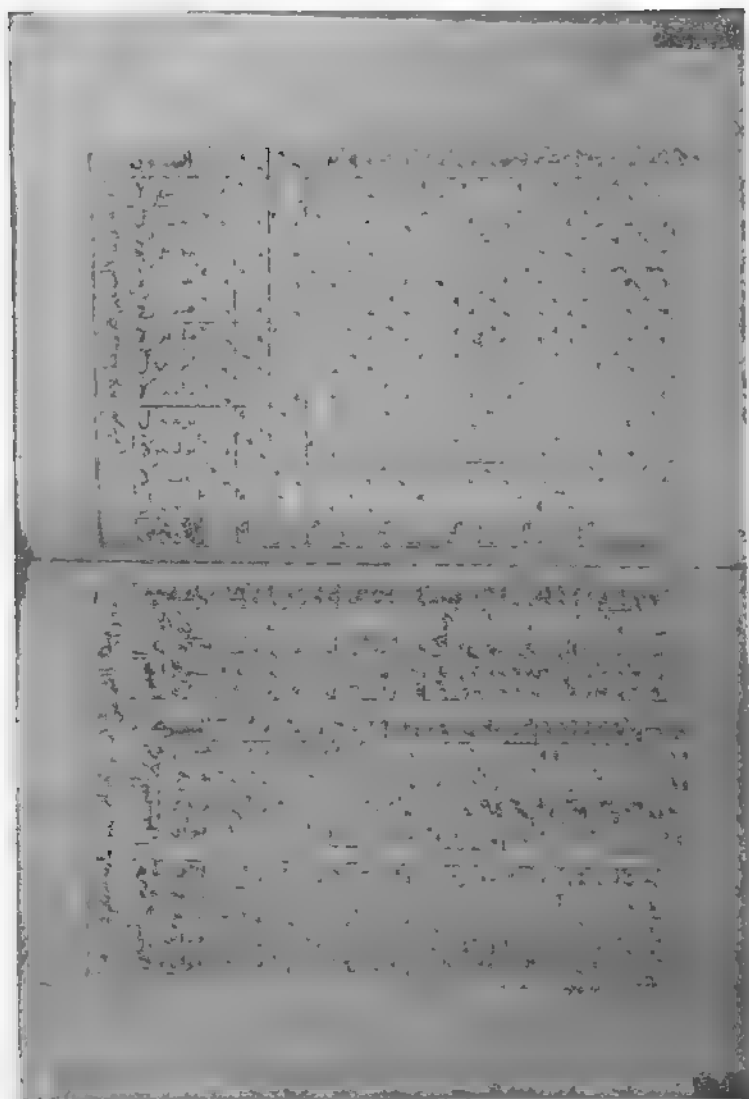
Fez ms. 909, II 51v. 31r



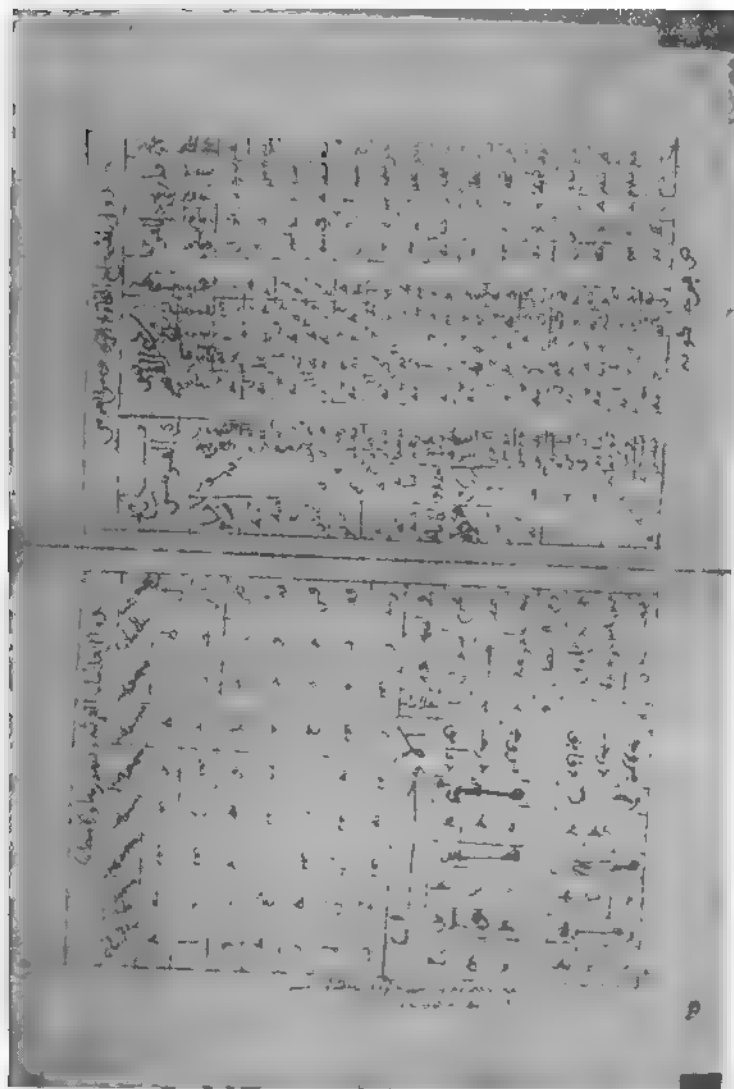
Escurial ar. 909, ff. 52v, 53r.



Escorial ar. 909, ff 51v, 52r.



Encornal ar. 909, ff. 50v, 51r.



Escorial ar 909, ff 49v, 50r.

١٠٠  
 ١٠١  
 ١٠٢  
 ١٠٣  
 ١٠٤  
 ١٠٥  
 ١٠٦  
 ١٠٧  
 ١٠٨  
 ١٠٩  
 ١١٠  
 ١١١  
 ١١٢  
 ١١٣  
 ١١٤  
 ١١٥  
 ١١٦  
 ١١٧  
 ١١٨  
 ١١٩  
 ١٢٠  
 ١٢١  
 ١٢٢  
 ١٢٣  
 ١٢٤  
 ١٢٥  
 ١٢٦  
 ١٢٧  
 ١٢٨  
 ١٢٩  
 ١٣٠  
 ١٣١  
 ١٣٢  
 ١٣٣  
 ١٣٤  
 ١٣٥  
 ١٣٦  
 ١٣٧  
 ١٣٨  
 ١٣٩  
 ١٤٠  
 ١٤١  
 ١٤٢  
 ١٤٣  
 ١٤٤  
 ١٤٥  
 ١٤٦  
 ١٤٧  
 ١٤٨  
 ١٤٩  
 ١٥٠  
 ١٥١  
 ١٥٢  
 ١٥٣  
 ١٥٤  
 ١٥٥  
 ١٥٦  
 ١٥٧  
 ١٥٨  
 ١٥٩  
 ١٦٠  
 ١٦١  
 ١٦٢  
 ١٦٣  
 ١٦٤  
 ١٦٥  
 ١٦٦  
 ١٦٧  
 ١٦٨  
 ١٦٩  
 ١٧٠  
 ١٧١  
 ١٧٢  
 ١٧٣  
 ١٧٤  
 ١٧٥  
 ١٧٦  
 ١٧٧  
 ١٧٨  
 ١٧٩  
 ١٨٠  
 ١٨١  
 ١٨٢  
 ١٨٣  
 ١٨٤  
 ١٨٥  
 ١٨٦  
 ١٨٧  
 ١٨٨  
 ١٨٩  
 ١٩٠  
 ١٩١  
 ١٩٢  
 ١٩٣  
 ١٩٤  
 ١٩٥  
 ١٩٦  
 ١٩٧  
 ١٩٨  
 ١٩٩  
 ٢٠٠  
 ٢٠١  
 ٢٠٢  
 ٢٠٣  
 ٢٠٤  
 ٢٠٥  
 ٢٠٦  
 ٢٠٧  
 ٢٠٨  
 ٢٠٩  
 ٢١٠  
 ٢١١  
 ٢١٢  
 ٢١٣  
 ٢١٤  
 ٢١٥  
 ٢١٦  
 ٢١٧  
 ٢١٨  
 ٢١٩  
 ٢٢٠  
 ٢٢١  
 ٢٢٢  
 ٢٢٣  
 ٢٢٤  
 ٢٢٥  
 ٢٢٦  
 ٢٢٧  
 ٢٢٨  
 ٢٢٩  
 ٢٣٠  
 ٢٣١  
 ٢٣٢  
 ٢٣٣  
 ٢٣٤  
 ٢٣٥  
 ٢٣٦  
 ٢٣٧  
 ٢٣٨  
 ٢٣٩  
 ٢٤٠  
 ٢٤١  
 ٢٤٢  
 ٢٤٣  
 ٢٤٤  
 ٢٤٥  
 ٢٤٦  
 ٢٤٧  
 ٢٤٨  
 ٢٤٩  
 ٢٥٠  
 ٢٥١  
 ٢٥٢  
 ٢٥٣  
 ٢٥٤  
 ٢٥٥  
 ٢٥٦  
 ٢٥٧  
 ٢٥٨  
 ٢٥٩  
 ٢٦٠  
 ٢٦١  
 ٢٦٢  
 ٢٦٣  
 ٢٦٤  
 ٢٦٥  
 ٢٦٦  
 ٢٦٧  
 ٢٦٨  
 ٢٦٩  
 ٢٧٠  
 ٢٧١  
 ٢٧٢  
 ٢٧٣  
 ٢٧٤  
 ٢٧٥  
 ٢٧٦  
 ٢٧٧  
 ٢٧٨  
 ٢٧٩  
 ٢٨٠  
 ٢٨١  
 ٢٨٢  
 ٢٨٣  
 ٢٨٤  
 ٢٨٥  
 ٢٨٦  
 ٢٨٧  
 ٢٨٨  
 ٢٨٩  
 ٢٩٠  
 ٢٩١  
 ٢٩٢  
 ٢٩٣  
 ٢٩٤  
 ٢٩٥  
 ٢٩٦  
 ٢٩٧  
 ٢٩٨  
 ٢٩٩  
 ٣٠٠  
 ٣٠١  
 ٣٠٢  
 ٣٠٣  
 ٣٠٤  
 ٣٠٥  
 ٣٠٦  
 ٣٠٧  
 ٣٠٨  
 ٣٠٩  
 ٣١٠  
 ٣١١  
 ٣١٢  
 ٣١٣  
 ٣١٤  
 ٣١٥  
 ٣١٦  
 ٣١٧  
 ٣١٨  
 ٣١٩  
 ٣٢٠  
 ٣٢١  
 ٣٢٢  
 ٣٢٣  
 ٣٢٤  
 ٣٢٥  
 ٣٢٦  
 ٣٢٧  
 ٣٢٨  
 ٣٢٩  
 ٣٣٠  
 ٣٣١  
 ٣٣٢  
 ٣٣٣  
 ٣٣٤  
 ٣٣٥  
 ٣٣٦  
 ٣٣٧  
 ٣٣٨  
 ٣٣٩  
 ٣٤٠  
 ٣٤١  
 ٣٤٢  
 ٣٤٣  
 ٣٤٤  
 ٣٤٥  
 ٣٤٦  
 ٣٤٧  
 ٣٤٨  
 ٣٤٩  
 ٣٥٠  
 ٣٥١  
 ٣٥٢  
 ٣٥٣  
 ٣٥٤  
 ٣٥٥  
 ٣٥٦  
 ٣٥٧  
 ٣٥٨  
 ٣٥٩  
 ٣٦٠  
 ٣٦١  
 ٣٦٢  
 ٣٦٣  
 ٣٦٤  
 ٣٦٥  
 ٣٦٦  
 ٣٦٧  
 ٣٦٨  
 ٣٦٩  
 ٣٧٠  
 ٣٧١  
 ٣٧٢  
 ٣٧٣  
 ٣٧٤  
 ٣٧٥  
 ٣٧٦  
 ٣٧٧  
 ٣٧٨  
 ٣٧٩  
 ٣٨٠  
 ٣٨١  
 ٣٨٢  
 ٣٨٣  
 ٣٨٤  
 ٣٨٥  
 ٣٨٦  
 ٣٨٧  
 ٣٨٨  
 ٣٨٩  
 ٣٩٠  
 ٣٩١  
 ٣٩٢  
 ٣٩٣  
 ٣٩٤  
 ٣٩٥  
 ٣٩٦  
 ٣٩٧  
 ٣٩٨  
 ٣٩٩  
 ٤٠٠  
 ٤٠١  
 ٤٠٢  
 ٤٠٣  
 ٤٠٤  
 ٤٠٥  
 ٤٠٦  
 ٤٠٧  
 ٤٠٨  
 ٤٠٩  
 ٤١٠  
 ٤١١  
 ٤١٢  
 ٤١٣  
 ٤١٤  
 ٤١٥  
 ٤١٦  
 ٤١٧  
 ٤١٨  
 ٤١٩  
 ٤٢٠  
 ٤٢١  
 ٤٢٢  
 ٤٢٣  
 ٤٢٤  
 ٤٢٥  
 ٤٢٦  
 ٤٢٧  
 ٤٢٨  
 ٤٢٩  
 ٤٣٠  
 ٤٣١  
 ٤٣٢  
 ٤٣٣  
 ٤٣٤  
 ٤٣٥  
 ٤٣٦  
 ٤٣٧  
 ٤٣٨  
 ٤٣٩  
 ٤٤٠  
 ٤٤١  
 ٤٤٢  
 ٤٤٣  
 ٤٤٤  
 ٤٤٥  
 ٤٤٦  
 ٤٤٧  
 ٤٤٨  
 ٤٤٩  
 ٤٥٠  
 ٤٥١  
 ٤٥٢  
 ٤٥٣  
 ٤٥٤  
 ٤٥٥  
 ٤٥٦  
 ٤٥٧  
 ٤٥٨  
 ٤٥٩  
 ٤٦٠  
 ٤٦١  
 ٤٦٢  
 ٤٦٣  
 ٤٦٤  
 ٤٦٥  
 ٤٦٦  
 ٤٦٧  
 ٤٦٨  
 ٤٦٩  
 ٤٧٠  
 ٤٧١

والله اعلم  
بما فيه  
الغيب

This image shows a page from a manuscript, identified as 'Mushaf al-Furqan' from the Topkapı Library. The page is densely filled with handwritten Arabic text in a cursive script, organized into multiple columns. The parchment appears aged and slightly discolored.



۱۰۰  
 ۱۰۱  
 ۱۰۲  
 ۱۰۳  
 ۱۰۴  
 ۱۰۵  
 ۱۰۶  
 ۱۰۷  
 ۱۰۸  
 ۱۰۹  
 ۱۱۰  
 ۱۱۱  
 ۱۱۲  
 ۱۱۳  
 ۱۱۴  
 ۱۱۵  
 ۱۱۶  
 ۱۱۷  
 ۱۱۸  
 ۱۱۹  
 ۱۲۰  
 ۱۲۱  
 ۱۲۲  
 ۱۲۳  
 ۱۲۴  
 ۱۲۵  
 ۱۲۶  
 ۱۲۷  
 ۱۲۸  
 ۱۲۹  
 ۱۳۰  
 ۱۳۱  
 ۱۳۲  
 ۱۳۳  
 ۱۳۴  
 ۱۳۵  
 ۱۳۶  
 ۱۳۷  
 ۱۳۸  
 ۱۳۹  
 ۱۴۰  
 ۱۴۱  
 ۱۴۲  
 ۱۴۳  
 ۱۴۴  
 ۱۴۵  
 ۱۴۶  
 ۱۴۷  
 ۱۴۸  
 ۱۴۹  
 ۱۵۰  
 ۱۵۱  
 ۱۵۲  
 ۱۵۳  
 ۱۵۴  
 ۱۵۵  
 ۱۵۶  
 ۱۵۷  
 ۱۵۸  
 ۱۵۹  
 ۱۶۰  
 ۱۶۱  
 ۱۶۲  
 ۱۶۳  
 ۱۶۴  
 ۱۶۵  
 ۱۶۶  
 ۱۶۷  
 ۱۶۸  
 ۱۶۹  
 ۱۷۰  
 ۱۷۱  
 ۱۷۲  
 ۱۷۳  
 ۱۷۴  
 ۱۷۵  
 ۱۷۶  
 ۱۷۷  
 ۱۷۸  
 ۱۷۹  
 ۱۸۰  
 ۱۸۱  
 ۱۸۲  
 ۱۸۳  
 ۱۸۴  
 ۱۸۵  
 ۱۸۶  
 ۱۸۷  
 ۱۸۸  
 ۱۸۹  
 ۱۹۰  
 ۱۹۱  
 ۱۹۲  
 ۱۹۳  
 ۱۹۴  
 ۱۹۵  
 ۱۹۶  
 ۱۹۷  
 ۱۹۸  
 ۱۹۹  
 ۲۰۰

Handwritten manuscript page from the "Mushaf al-Furqan" (Quran). The text is written in Arabic script, likely Maghrebi or Andalusian style, on parchment. It features several large, ornate initial letters (Basmala) at the beginning of sections, such as "Bismillah" and "Alif Lam Mim". The text is arranged in horizontal lines, with some marginalia visible on the right side.

Escorial ar. 909, ff 46v, 47r.

۱۰۰  
 ۱۰۱  
 ۱۰۲  
 ۱۰۳  
 ۱۰۴  
 ۱۰۵  
 ۱۰۶  
 ۱۰۷  
 ۱۰۸  
 ۱۰۹  
 ۱۱۰  
 ۱۱۱  
 ۱۱۲  
 ۱۱۳  
 ۱۱۴  
 ۱۱۵  
 ۱۱۶  
 ۱۱۷  
 ۱۱۸  
 ۱۱۹  
 ۱۲۰  
 ۱۲۱  
 ۱۲۲  
 ۱۲۳  
 ۱۲۴  
 ۱۲۵  
 ۱۲۶  
 ۱۲۷  
 ۱۲۸  
 ۱۲۹  
 ۱۳۰  
 ۱۳۱  
 ۱۳۲  
 ۱۳۳  
 ۱۳۴  
 ۱۳۵  
 ۱۳۶  
 ۱۳۷  
 ۱۳۸  
 ۱۳۹  
 ۱۴۰  
 ۱۴۱  
 ۱۴۲  
 ۱۴۳  
 ۱۴۴  
 ۱۴۵  
 ۱۴۶  
 ۱۴۷  
 ۱۴۸  
 ۱۴۹  
 ۱۵۰  
 ۱۵۱  
 ۱۵۲  
 ۱۵۳  
 ۱۵۴  
 ۱۵۵  
 ۱۵۶  
 ۱۵۷  
 ۱۵۸  
 ۱۵۹  
 ۱۶۰  
 ۱۶۱  
 ۱۶۲  
 ۱۶۳  
 ۱۶۴  
 ۱۶۵  
 ۱۶۶  
 ۱۶۷  
 ۱۶۸  
 ۱۶۹  
 ۱۷۰  
 ۱۷۱  
 ۱۷۲  
 ۱۷۳  
 ۱۷۴  
 ۱۷۵  
 ۱۷۶  
 ۱۷۷  
 ۱۷۸  
 ۱۷۹  
 ۱۸۰  
 ۱۸۱  
 ۱۸۲  
 ۱۸۳  
 ۱۸۴  
 ۱۸۵  
 ۱۸۶  
 ۱۸۷  
 ۱۸۸  
 ۱۸۹  
 ۱۹۰  
 ۱۹۱  
 ۱۹۲  
 ۱۹۳  
 ۱۹۴  
 ۱۹۵  
 ۱۹۶  
 ۱۹۷  
 ۱۹۸  
 ۱۹۹  
 ۲۰۰

Excerpt of 909, ff. 44v, 45r.

Dist. betw. moon and node	True daily lunar motion			
	12	13	14	15
	Amount of the moon's body eclipsed			
	digits	digits	digits	digits
1	12	12	12	12
2	12	12	12	12
3	12	12	12	12
4	12	12	12	12
5	12	12	12	12
6	8	10	11	11
7	7	6	9	10
8	4	5	7	8
9	2	3	4	6
10	0	0	2	3
11	0	0	0	2

Dist betw. moon and node	True daily lunar motion			
	12	13	14	15
	Amount of the sun's body eclipsed			
	digits	digits	digits	digits
1	12	12	12	12
2	12	12	12	12
3	12	12	12	12
4	8	8	10	11
5	6	6	8	9
6	4	4	6	6
7	3	3	4	6
8	1	2	3	3
9	0	1	1	2
10	0	0	0	2
11	0	0	0	1

folio

*Table of Lunar Latitude*

62v

The argument is  $\lambda = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 360^\circ$ .

Entries are  $4;30^\circ \sin \lambda$ , to minutes, the standard

Indian method. Cf. *Suter 2*, Tables 21-26.

*Table of Eclipse Colors*

63r

The table is in two parts. On the right the argument is:  $10', 20', 30', \dots, 60'$  of lunar latitude. Entries are colors of the moon.

On the left the argument is  $5', 10', 15', \dots, 35'$  of lunar latitude. Entries are colors of the sun.

The same table is in *Ibn al-Bannā'*.

*Colephon* (No date or name is given).

63v

MS Paris B. N. ar. 6913, f. 102r of *al-Zij al-Riqānī*, an eleventh-century compilation; MS Escorial ar. 927, f. 6r of the anonymous recension of the ninth-century *Mumtaḥan Zij*; and MS Cairo TFF 11, f. 61r of the eleventh-century Persian astrological handbook entitled *Rawḍat al-munajjimīn*.

Each of these tables is investigated in a forthcoming study by the second author on early Islamic tables for determining lunar crescent visibility.

ZODIACAL SIGNS	CLIMATES						
	1 <sup>st</sup>	2 <sup>d</sup>	3 <sup>d</sup>	4 <sup>th</sup>	5 <sup>th</sup>	6 <sup>th</sup>	7 <sup>th</sup>
Aries	11;24	11;4	11;19	10;6	11;17	9;9	9;28
Taurus	11;11	11;24	10;33	10;21	10;12	9;18	9;28
Gemini	11;2	11;11	10;10	10;32	9;29	9;24	9;3
Cancer	11;10	11;15	11;38	10;32	12;25	12;46	12;9
Leo	13;14	13;18	13;4	15;0	16;7	16;17	13;15
Virgo	14;27	16;19	17;2	17;10	23;27	23;21	24;50
Libra	15;2	16;7	18;19	19;4	21;28	22;24	24;1
Scorpio	14;12	14;32	16;19	17;17	13;2	19;42	21;2
Sagittarius	12;0	18;39	13;18	14;42	14;31	14;2	14;31
Capricorn	11;10	11;45	11;21	11;26	11;0	11;9	11;45
Aquarius	11;3	11;47	11;2	11;4	9;15	9;7	9;15
Pisces	11;24	11;11	11;9	10;9	9;11	9;0	8;14

Table of Lunar Crescent Visibility, f. 61v

*folio*

### Table of Eclipses

62r

There are in fact two tables, transcribed below, one for lunar, one for solar eclipses. For each there are two arguments:

1, 2, 3, ..., 11, distance between moon and node,

12, 13, 14, 15, deg./day lunar motion.

Entries give the eclipse magnitude in integer digits.

This is a garbled version of a table given by *Ibn al-Bannā*.

	<u>folio</u>
<i>Table of First Stations of the Five Planets</i> (see Kennedy 1, p. 142)	59v
Entries are to minutes of arc for argument $6^\circ, 12^\circ, 18^\circ, \dots, 180^\circ$ . Essentially this is the table of al-Battānī ( <i>Nallino</i> , vol. 2, pp. 138-9), hence originally from Ptolemy's Handy Tables. See also Suter 2.	
<i>Table, Equation of the Trepidation Motion</i>	60r
Argument range: $\Theta = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 360^\circ$ . Entries, to minutes, are close to $10;45 \sin \Theta$ . Thābit (in Vernet 1, p. 91, note 182 and p. 92, note 187) has a maximum of $10;45^\circ$ , and al-Marrākushī (in Sédillot-père, p. 131) has $9;59^\circ$ .	
<i>Table of Right Ascensions</i>	60v
Entries are to degrees (sic) for each degree of the argument. The Function is in fact the normed right ascension function, $A_0(\lambda) - 90^\circ$ , commencing with Capricorn.	
<i>Table of Oblique Ascensions for (the latitude of) Fez</i>	61r
Layout and precision as in the preceding table, except that this commences from Aries.	
<i>Table of Evening Lunar Crescent Visibility.</i>	61v
transcribed below. The same table appears in Paris MS B.N. Or. 2513, f. 71v, of the thirteenth-century Egyptian <i>Muṣṭalah Zīj</i> ; f. 58v of an unnumbered Maghribī astronomical manuscript in the Museo Naval de Madrid; MS Cairo Dār al-Kutub MM 23, f. 9r, of a small <i>zīj</i> compiled in Cairo ca. 1700; MSS Milan Ambrosiana C82, front flyleaf, and Escorial ar. 966, f. 192v of a redaction of the astronomical tables of the late-fifteenth-century Spanish Jew Abraham Zacuto (see note 15 to Section 2) prepared in Istanbul in the early sixteenth century; and in MS Cairo TM 119, f. 1r on the title folio of an Egyptian copy of an early Iraqi astrological treatise.	

The table from al-Majrī's recension of al-Khwārizmī's *zīj* investigated by Kennedy & Janjarian is unrelated to al-Khwārizmī. It is also found in MS Hyderabad Andhra Pradesh State Library 298 of the *zīj* of Ibn Ishāq (see note 9 to Section 2) where it features as table no. 160. Here the table is attributed to an individual called al-Qallās, whose name is new to the literature. This table is computed for a latitude in northern Spain. Al-Khwārizmī's table for Baghdad is contained in

- 1, 2, 3, ..., 30 days,  
 1, 2, 3, ..., 12 Hijra months,  
 1, 2, 3, ..., 30 Hijra years.

Positions are given for

600, 630, 660, ..., 990 H.

<i>Tables of Lunar Mean Motion, Anomaly, and Nodes</i>	51v-52v
Layout, arguments, and precision as for the sun.	
<i>Tables, Mean Motion of Saturn, Jupiter, and Mars</i>	53r-54r
Layout, etc., as for the sun.	
<i>Tables, Anomalistic Argument of Venus and Mercury, as for the sun.</i>	54v-55r
<i>Table of Hourly Planetary Mean Motions</i>	55v
Entries are to seconds, for 1, 2, 3, ... 24 hours, for the sun, moon, lunar anomaly, lunar nodes, Saturn, Jupiter, Mars, and the anomalistic arguments of Venus and Mercury.	
<i>Table of the Motion of Trepidation</i>	56r
Layout, arguments, and precision as for the mean sun.	
<i>Table of the Solar Equation</i>	56v
Entries are to minutes of arc for each degree of the argument. The function is discussed in Section 3 above.	
<i>Table of the Lunar Equation</i>	56v
Same layout, arguments, and precision as for the solar equation. See Section 3 above.	
<i>Table, The Anomalistic Equation of Saturn</i>	57r
Entries are to minutes of arc for each degree of the argument. The function is discussed in Section 3 above.	
<i>Table Equation of the Center, for Saturn</i>	57r
Domain of the argument and precision of entries is as for the other equation of Saturn. See Section 3 above.	
<i>Tables, Equations of the Anomaly and Center, for Jupiter and Mars</i>	57v-58r
Layout, arguments, and precision are as for Saturn.	
<i>Tables, Equations of the Anomaly and Center, for Venus and Mercury, as for Saturn.</i>	58v-59r



folio

*Table for Extracting the Rūmī Date (i. e. Seleucid epoch, Julian years)  
from the Arab (i. e. Hijra)* 49v

For 480, 510, 540, ..., 900 H the equivalent Rūmī date is  
given in years, months, days, and minutes (i. e. sixtieths) of days.

For 1, 2, 3, ... 30 Hijra years,

1, 2, 3, ... 12 Hijra months,

1, 2, 3, ..., 12 Latin months (beginning with October),

the elapsed time is given in Rūmī years, months, days, and minutes of days. The same table is in *Suter 2*, Table 3, *Sedillot-père*, p. 97, and Ibn al-Bannā'.

*A Table of Signa (initial weekdays) of the Arab (i. e. Hijra) Years and their  
Months, and the Apogees* 50r

The entries are changes in the signa for:

30, 60, 90, ..., 210 years,

1, 2, 3, ..., 30 years (not in order).

1, 2, 3, ..., 12 Hijra months.

There is a table of planetary apogees, to minutes of arc, transcribed and discussed in Section 2 above. The list is repeated at the top of f. 53r. The same table is in *Suter 2*, Table 2, and Ibn al-Bannā'.

*A Table of Signa of the Foreign ('ajamiya) Months in the Calendar of  
the Two-Horned (Alexander, i. e. Rūmī)* 50v

This is a rectangular, double argument table, in which the entries are signa, and the arguments are:

1, 2, 3, ..., 27 (Julian) years (since 28 — 7 days/week  
× 4, the leap cycle)

and Oct., Nov., Dec., ..., Sept.

The leap years are also indicated. This table is also in *Suter 2*, Table 3a, and Ibn al-Bannā'.

*Table of the Solar Mean Motion in Hijra Years, for Noon at the City of  
Fez* 51r

All entries are to seconds. Motions are given for:

	<u>folio</u>
Section 2, <i>On Determining the Day of the Week on Which a Given Arab (Hijra) Year Begins</i>	45r
Section 3, <i>On Determining the Initial Day of the Week of Months of Foreign (Calendars)</i>	45v
Section 4, <i>The Solar Equation</i>	45v
Section 5, <i>On (true) Positions of the Moon and Its Equation</i>	46r
Section 6, <i>On the Lunar Node</i>	46r
Section 7, <i>On the (longitudes) of the Superior Planets</i>	46r
Section 8, <i>On (the longitudes of) Venus and Mercury</i>	46v
Section 9, <i>Is the Planet Retrograde or in Forward Motion?</i>	46v
Section 10, <i>In Explanation of Trepidation</i>	46v
Section 11, <i>On Obtaining the Ascensions of the Signs</i>	47r
Section 12, <i>On the Degrees of Rising with the Equation</i>	47r
Section 13, <i>On How (to determine) the Transfer (ascendant)</i>	47r
Section 14, <i>On the Equalization of the Houses</i>	47v
Section 15, <i>On (first) Visibility of the (lunar) Crescent</i>	47v
Section 16, <i>On Determining the Lunar Latitude</i>	48r
Section 17, <i>On al-Faql al-Muqawwam</i>	48r
(This seems to be a measure of the amount by which the planet has passed the last cardine, perhaps for finding its house.)	
Section 18, <i>On Determining (the astrological doctrine of) the Tasyir.</i>	48r
Section 19, <i>On the Determination of Eclipses</i>	48v
Table of the Solar Apsidal Motion	49r

All entries are to seconds of arc. Apsidal motions are given for:

- 1,2,3, ... , 30 days,
- 1,2,3, ... , 12 (Hijra) months,
- 1,2,3, ... , 30 (Hijra) years.

This table is practically identical with one in the *zij* of Ibn al-Bannā' (*Vernet I*) found on f. 15r in the same MS. It was published in *Millás*, p. 352, see also Section 3 above.

For the Hijra epoch *Millás* (*ibid.*) gives  $2^{\circ} 16;44,17^{\circ}$ . In the Escorial manuscript of Ibn al-Bannā's *zij* (fol. 15r) there is a marginal note that the apogee in 990 Hijra (= 1582) is  $2^{\circ} 20;10,51^{\circ}$ , which is consistent with the Hijra epoch position and the motion of  $3;26,33^{\circ}$  for 990 lunar years given in the table. A marginal note, in the same hand, to al-Qusunḍinī's table (fol. 49r) gives the apogee in 990 Hijra as  $2^{\circ} 20;12,27^{\circ}$ , for reasons best known to the writer of the note.

and obtain the epicyclic equation ( $\sigma(\alpha')$ ) at its place. Look at the argument a second time, (4) and if you have zodiacal signs exceeding six, subtract (the epicyclic equation from the modified mean). Then note (5) any modified planetary mean (here  $\lambda$  is intended) as you find it, in its resulting place. (6) But if the modified argument is less than your signs (i.e., if  $\alpha' < 6^\circ$ ) (7) add it (the epicyclic equation) to the mean, and its place (i. e. true longitude) will be there, and note, it, and do not lose it.

Several conclusions are immediate and unequivocal. The equation functions are of Indian (or Iranian), provenance with no trace of Ptolemaic influence. On the other hand, the characteristic "halving of the equation" is conspicuously absent. The calculation of  $\alpha'$  is described completely and correctly. The only objection to the adoption of expression (5) arises from the author's prescription of  $\lambda'$  as being  $\lambda' + \mu(x)$  instead of  $\lambda' - \mu(x)$  as it should be. We must bear in mind, however, that since negative numbers were generally unknown to medieval scientists, they were often constrained to split a rule into special cases if a function were sometimes positive and sometimes negative. The complete rule would then demand addition in one case and subtraction in the other, or vice versa. It is possible that a complete couplet has been dropped from al-Qusunṭīnī's poetry by a careless scribe. If the passage beginning with line 25 could be restored as

Then enter with it according to what you see for the center, (obtaining) its equation ( $\mu(x)$ ) there, for distinguishing it. [If the center is less than six signs, subtract the equation from the center, then from the mean. But if it is more than six signs] add it to the center, then to the mean...

the rule would be (5) without flaw. Or perhaps, in hammering out his doggerel, the poet inadvertently left out our restoration. At any rate we prefer not to accuse al-Qusunṭīnī of having been an originator. We suspect he obtained the algorithm from a sequence of predecessors, including perhaps Maghribī, early Islamic, Indian, and pre-Ptolemaic Greek elements. The discovery of additional texts may settle the issue. Meanwhile we favor expression (5).

It is also possible that in its original form the procedure contained some sort of "halving the equation" routine, as in (5), which was dropped somewhere along the chain of transmission.

## 6. Table of Contents of the Zīj

	<u>folia</u>
<i>Introduction</i> , with the customary praise of God, His Prophet, and the author's patron.	44v
<i>Section (faṣl) 1, On Foreign ('ajam) Calendars</i> (a description of the use of tables to transform a date from the Hijra to a different calendar)	45r

$$(3) \quad \lambda = \bar{\lambda} - \mu(x) + \sigma(\alpha') + I(x') \cdot \Delta\sigma(\alpha'),$$

where  $\alpha' = \alpha + \mu(x)$ ,  $x' = x - \mu(x)$ ,  $I$  is an interpolation function varying between  $\pm 1$ , and  $\Delta\sigma$  is the difference between  $\sigma$  calculated at minimum and maximum epicycle distances.

For the simple eccentric configuration illustrated in our figure a practical and accurate mode of determining true longitude (nowhere intimated in an extant text, so far as we know) would be to put

$$(4) \quad \lambda = \bar{\lambda} - \mu(x) + \sigma(\alpha') + I(x) \cdot \Delta\sigma(\alpha'),$$

where  $\alpha'$ ,  $I$ , and  $\Delta\sigma$  are as indicated above.

We will seek to show that the model intended by al-Qusuntīnī's *zīj* is

$$(5) \quad \lambda = \bar{\lambda} - \mu(x) + \sigma(\alpha') = \bar{\lambda}' + \sigma(\alpha'),$$

where we call  $\lambda'$  the *modified mean*. This is expression (4) with the last term missing. That is to say, it takes cognizance of the nodding of the epicyclic apogee about its mean position, but it ignores the effect on  $\sigma$  of the varying epicyclic distance from the earth.

Aside from the tables themselves, all the information upon which these conclusions are based is found in Section 7 of the verse introduction (beginning on folio 45r) which describes the calculation of  $\lambda$  for the superior planets. The next section does the same for Venus and Mercury, but adds nothing significant.

Section 7 of Qusuntīnī's *zīj* is translated below. Parentheses are used to denote beginnings of lines in the text, and to interpolate explanatory material. The redundant verbiage in the text consists of words or phrases introduced to pad out the meter and the rhyme.

(f.46r:20) The first of those are Saturn and Jupiter, and after those two, Mars, indubitably. (21) Extract the mean ( $\bar{\lambda}$ ) for that situation, for any one of them you choose (?), along the succession (of the zodiacal signs). (22) Then, without fail, subtract it from the solar mean properly; (23) there will remain for you the argument ( $\alpha = \lambda_s - \lambda$ ) in this operation. Retain it without fail. (24) Then subtract its apogee from the mean. There will remain for you the center ( $x = \bar{\lambda} - \lambda_a$ ) in this style. (25) Then enter with it according to what you see for the center, (obtaining) its equation ( $\mu(x)$ ) there, for distinguishing (it). (26) Add it to the center, then to the mean (i.e., form  $x + \mu(x)$  and  $\lambda + \mu(x) = \lambda'$ , sic), for any planet you suppose as a condition. (27) But subtract it ( $\mu(x)$ ) from its (the planet's) argument if its center is greater than six signs - obtain it, (f.46v:1) but if it is less than that number ( $x < 6^\circ$ ), (do) the opposite with it, do not add continuously (i.e. form  $\alpha' = \alpha + \mu(x)$  algebraically). (2) Enter with this modified argument ( $\alpha'$ ) where you see it registered in the table, (3)

and the planet on the epicycle are given by two linear functions of time:  $\bar{\lambda}$ , the mean longitude, and  $\alpha$ , the argument of the epicycle anomaly. Then the true longitude is

$$(1) \quad \lambda = \bar{\lambda} + \sigma(\alpha),$$

where  $\sigma$  is the *epicyclic equation*. Note from the picture that  $\sigma$  causes periodic variations in  $\lambda$ 's rate of change; alternately  $\lambda$  leads  $\bar{\lambda}$ , then lags behind it.

At some time it was realized that (1) is too simple to yield precise predictions of position for planets. The deferent was made eccentric, its center being displaced from the earth. This caused a second periodic irregularity in the planet's motion,  $\mu(\kappa)$ , the *equation of the center*, where  $\kappa = \lambda - \lambda_s$  is the center,  $\lambda_s$  is the solar mean longitude.

The addition of the second equation greatly complicated the calculation of true longitudes. The two equations cannot simply be added algebraically to  $\bar{\lambda}$  because they interact with each other in a complicated manner. For one thing, the initial point from which the argument is measured, the *epicyclic apogee*, oscillates back and forth with respect to its fixed position in the simple model. And secondly, the distance from earth to epicycle also varies. When the epicycle retires from the earth, its effect is diminished, and conversely.

Tables of the  $\sigma$  and  $\mu$  functions were prepared, the arguments  $\alpha$  and  $\kappa$  being determined from the mean motion tables. Neither equation is in principle symmetrical with respect to an  $\alpha$  or  $\kappa$  of 90°. Nevertheless it was customary in Indian and Sasanian Iranian astronomy to use for  $\mu$  a sine wave of amplitude  $\mu_{\max}$  for each planet. In addition to the equation tables, some computational device was necessary, to give numerical effect to the interaction described above between the equations.

Indian astronomers used an ingenious if complicated technique to attain this end. Its main lines are indicated by the expression

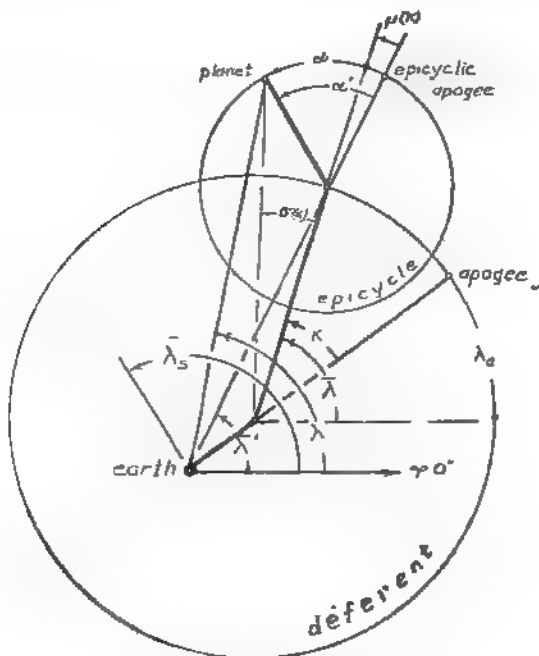
$$(2) \quad \lambda = \bar{\lambda} - \mu_2 + \sigma_2,$$

from  $\sigma_1 = \sigma(\alpha)$ ,  $\lambda_1 = \bar{\lambda} + \frac{1}{2}\sigma_1$ ,  $\kappa_1 = \kappa + \frac{1}{2}\sigma_1$ ,  $\mu_1 = \mu(\kappa_1)$ ,  $\kappa_2 = \kappa_1 - \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1$ , etc. The general idea was to merge the effects of the two equations by successively introducing half of the one into the determination of the other. There were variants of the basic approach, some rules halving only one equation, and some neither. Details will be found in Neugebauer 1, and 2, pp. 23-30.

A basic improvement was effected by Ptolemy's introduction (ca. 150 A.D.) of the *equant*, a device to introduce a periodic variation in the speed of the epicycle center along the deferent. After suitable modification of the  $\mu$  functions, Ptolemaic longitudes are calculated by the expression

### 5. Calculation of True Longitudes

Since the evidence upon which our further inferences are based is somewhat ambiguous, it will be useful to preface its presentation with a sketch of several ancient planetary models, to which al-Qusuntî's is related. For all these models the orbits of the planet and the earth about the sun can be thought of as represented by two circles, the *deferent* and the *epicycle* shown in the figure below. Which circle stands for which orbit depends upon whether an inner or outer planet is being considered. Without essential loss of generality, the figure and the discussion below are taken to be for an outer planet.



An eccentric (non-equant) model  
for planetary motion.

The simplest (and earliest) of the models described has the earth at the center of the deferent. The planet advances along the periphery of the epicycle at constant speed whilst the epicycle center traverses the deferent with a different constant speed. At any instant the locations of the epicycle center

ṭinī's whole set of apogees is a rounded off version of Ibn al-Bannā's, which is given to seconds (*Vernet 1*).

It is worth remarking that  $2^{\circ} 16;44,17^{\circ}$ , the position given for the solar apogee at the Hijra epoch (on f. 49r, cf. *Azarquiel*, p 352) is very close to the  $2^{\circ} 16;45,21^{\circ}$  used by Ibn al-Kammād, a student of al-Zarqallū (*Toomer 2*, p. 321). It is possible that the discrepancy is due to a difference in the calculation of precession.

#### 4. Planetary Equation Tables

By and large, these tables are, for al-Qusuntīnī, the same as the analogous ones in the Khwārizmī *zīj* (*Suter 2*, pp.132-167), except that, whereas in the latter the entries for sun and moon have been carried to seconds, in the former they have been truncated (not rounded) to minutes. Thus the solar and lunar tables have been calculated by the "method of declinations":

$$e = e_{\max} \cdot \delta(x)/\varepsilon,$$

where  $e$  is the equation,  $\delta$  the solar declination function,  $x$  the center (see Section 5 below and the accompanying figure), and  $\varepsilon$  is the obliquity of the ecliptic. The planetary equations of the center are:

$$e = e_{\max} \sin x,$$

hence were computed by the "method of sines". The epicyclic equations are based on the standard eccentric model.

	center	epicyclic
sun	$2;1[4]^{\circ}$	
moon	$4;56$	
Saturn	$5;3[6]$	$5;40$
Jupiter	$5;[6]$	$10;53$
Mars	$11;13$	$40;31$
Venus	$2;14$	$47;11$
Mercury	$4;1$	$21;30$

where square brackets around a digit indicate restorations of scribal errors. Of these there are a good many. For instance, by plotting each of the ninety entries in the solar equation table it can be shown that about a dozen of them are erroneous.

The numbers cited above are standard parameters of Indian astronomy. The method of declinations may be from Sasanian Iran or early Islamic; it is not Ptolemaic (see *Neugebauer 2*, pp. 95-101).

sun	0;59,8,11,30,5,56, close to the value in the <i>Toledan Tables</i> (see <i>Toomer</i> , 1, p. 44) which is that of Ibn al-Bannā' (see <i>Vernet</i> , 1.).
solar apsidal motion	0;0,0,2,7,11, found with Ibn al-Bannā' due to al-Zarqālū, see <i>Toomer</i> , 2, p. 316.
moon	13;10,34,52,48, the same as al-Khwārizmī, Ibn al-Bannā', and the <i>Toledan Tables</i> .
moon (anomaly)	13;3,53,56,19 essentially the value of Ptolemy and many others, including the <i>Toledan Tables</i> .
Innar nodes	- 0;3,10,46,57,52, close to Ibn al-Bannā' and the <i>Toledan Tables</i> .
Saturn	0;2,0,27,50,55, close to Ibn al-Bannā'.
Jupiter	0;4,59,7,37,54, close to Ibn al-Bannā' and the <i>Toledan Tables</i> .
Mars	0;31,26,30,0,51,
Venus (anomaly)	0;36,59,28,13,46,16, close to the value of the <i>Ilkhānī Zīj</i> (cf. <i>Kennedy</i> , <i>Zīj</i> No. 6).
Mercury (anomaly)	3;6,24,7,55
trepidation	0;0,0,53,20,31

These numbers exhibit a relation to Andalusian and Maghribi astronomy, which is not surprising. It will be seen in the next section that al-Qusunṭīnī's planetary equation tables are simplified versions of those of al-Khwārizmī, the extant version of whose *zīj* was transmitted via Muslim Spain. Nevertheless the mean motions above are independent of al-Khwārizmī's ultimately Indian parameters (cf. *Neugebauer* 2, p. 93, and *Burckhardt*).

On f. 50r (and again on 53r) the following list of apogee longitudes is given, with no date (a superscript *s* denotes a zodiacal sign, i.e. 30°):

Saturn	7° 29;43 <sup>s</sup>
Jupiter	5° 9;43
Mars	4° 2;13
sun	2° 17;19
Venus	2° 17;19
Mercury	6° 18;34

A marginal note, apparently in the same hand as the text, says that the distance from the apogee of Mercury to that of the sun is 4° 1;8°. In fact, since 2° 17;19° + 4° 1;8° = 6° 18;27°, the statement is almost correct. Since in the Arabic alphabetical numeral system the symbols for 4 (د) and 7 (ز) are easily confused, restoration of Mercury's apogee to 6° 18;27° would make the note correct.

For the three superior planets the distances between their apogees is exactly the same as those in al-Battānī's *zīj* (*Nallino*, vol. 1, p. 241). But al-Qusun-



times of the five, or occasionally in the Maghrib six, daily prayers.<sup>1</sup>

As elsewhere in the medieval Islamic world there existed in the Maghrib alongside this scientific activity in astronomy a tradition of primitive folk astronomy. The pronouncements of one Abū Miqrā', who lived in the thirteenth century, were accorded far more respect than was warranted by their scientific content.<sup>2</sup>

About the year 1300 the astronomer Ibn al-Bannā' compiled an almanac of the same kind as the earlier and better-known *Calendar of Cordova*.<sup>3</sup> At the end of the fourteenth century a certain al-Jādārī wrote a poem on timekeeping which was much commented upon in later centuries.<sup>4</sup> This kind of material is worth studying for its own sake but also has special rewards for the historian of science: in an anonymous commentary on al-Jādārī's poem compiled in Tlemcen in the sixteenth century there are accounts of considerable historical interest concerning earlier Maghribi activity in measurements of the obliquity of the ecliptic (see above), trepidation, and twilight determinations.<sup>5</sup>

Astronomical activity in the Maghrib continued until the colonial period, but by then the great zijes of Ibn Ishāq and Ibn al-Bannā' and most of the underlying theory had been long forgotten. Rather, a plethora of poems on folk astronomy and on the use of the almucantar and sine quadrants for timekeeping were the favorite reading of those who passed as astronomers.<sup>6</sup> As we have shown, the earlier Maghribi tradition was relatively rich and is of considerable importance to the history of Islamic astronomy. Furthermore as we have noted, most of the relevant sources have yet to be studied properly. The historical and biographical sources must also be exploited before we can gain a clearer picture of astronomy in the medieval Maghrib.

### 3. Mean Motion Parameters and Apsidal Positions

From the mean motion tables the underlying base parameters were "squeezed" by a process of successive divisions of total mean travel by the respective time spans involved. The results, in degrees per day, are tabulated below, accompanied by comments where appropriate.

1. See, for example, *Mayar*, p. 67. Nevertheless, the term seems to relate originally to an astronomer capable of reckoning the equations (*ta'ādīl*) of the sun, moon, and planets.

2. On Abū Miqrā' see *Cohn & Renaud*. See also *Cairo Survey*, no. F17 and F49.

3. Translated in *Renaud 3*.

4. On al-Jādārī see *Suter 1*, no. 424a; *Renaud 1*, no. 424a; and *Cairo Survey*, no. F26.

5. This commentary is extant in MSS Cairo K 4311 (defective) and also London B.L. 411.2.

6. On some late Maghribi astronomical works see *Renaud 2* and 7.

fourteenth century, astrolabes of excellent construction were being produced.<sup>1</sup> In the late thirteenth and early fourteenth centuries there were constructed in Fez two astronomical clocks, of a kind known otherwise only from mid-fourteenth century Damascus. The first clock was set up in the Qarawiyin Mosque<sup>2</sup> and the second in the Bu'ināniyya madrasa:<sup>3</sup> both were water-clocks fitted with an astrolabic rete. The first clock, in its later form, is still *in situ* although the gear mechanisms have gone, and most of the second clock has disappeared: the remains of both clocks have been investigated by Prof. Derek J. de Solla Price. Several later Maghribi astrolabes and quadrants survive in museums around the world,<sup>4</sup> attesting to a continuing interest in instrumentation in the Maghrib until the nineteenth century.

In the fourteenth century extensive sets of tables for time-keeping by the sun and stars and for regulating the astronomically-defined times of prayer were compiled in Tunis after the model of the tables currently in use in Damascus.<sup>5</sup> Another smaller set of tables for regulating the times of prayer was prepared for different localities in Morocco.<sup>6</sup> A sundial from fourteenth century Tunis reflects the interest of the Maghribis in times of day with special religious significance that had no counterpart in contemporary practice in Mamluk Egypt and Syria.<sup>7</sup> The times are not displayed on a later Tunisian sundial in the Mosque of Sidi 'Uqba in Qayrawān,<sup>8</sup> but yet other times are tabulated in some Ottoman prayer-tables for Algiers.<sup>9</sup> The position of the *mu'addil* appears to have been the Maghribi equivalent to of the *muwaqqit* of the Mamluk world, that is, the astronomers associated with mosques and madrasas who were responsible for regulating the astronomically-defined

1. See, for example, *Mayer*, p. 32 on the works of Abū Bakr b. Yūsuf of Marrakech and Supplement, p. 294 on 'Alī b. Ibrāhīm of Taza. (Another incomplete astrolabe made by him is preserved in the Musée d'Histoire des Sciences in Geneva.)

2. See *Mayer*, p. 67 sub Muhammad al-Habbāk, p. 77 sub Muhammad as-Ṣinhājī, p. 73 sub Muhammad b. Muhammad b. al-'Arabi, and *Assemani*, p. 216 sub Ibn al-Lajā'i, for references to the historical sources on this clock, and more recently *Price* for a thorough investigation. On the clock in Damascus see the brief remarks in the article on Ibn al-Shāṭir in *DSB* by D. A. King.

3. See *Mayer*, p. 40 sub 'Alī b. Ahmad, and also *Price*.

4. See, for example, *Mayer*, pp. 60-61 sub Muhammad b. Ahmad, and also *Jonin* on a Tunisian quadrant.

5. On these Tunisian tables see the brief remarks in *King I*, pp. 192-193 and on the Syrian tables see *King 2*. More information is contained in the forthcoming *Studies in Astronomical Timekeeping in Medieval Islam* by the second author. The various Tunisian tables are preserved in MSS Berlin Ahlwardt 5724 and Cairo DM 689.

6. These tables are extant in MS Cairo TR 338, 2 - see *Cairo Cat. and Survey*, no. F35 for details.

7. See *King I* for a detailed description of this sundial. (On p. 189 the dimensions of the sundial should be 24 cms. × 24 cms. and not 24 × 34 as stated.) See also *King 3*, pp. 367-370 on some later Maghribi and Andalusian texts on sundial theory.

8. Cf. *Jonin*, pp. 208-211 and *King 3*, pp. 369-370 on this instrument.

9. These tables are preserved in MS Cairo TBT 9, 1: see *Cairo Cat. and Survey*, no. F68 for details.

The Moroccan scholar Ibn al-Bannā' compiled a *zīj* in Marrakesh about the year 1300.<sup>1</sup> This survives in several copies but the tables have yet to be studied properly. The astronomer Ibn al-Raqqām compiled in Tunis in the early fourteenth century two *zīj*es, both of which are extant in unique manuscripts and have yet to be studied.<sup>2</sup> One of Ibn al-Raqqām's *zīj*es is said by the author to be based on another by Abū'l-Ḥasan ibn 'Abd al-Ḥaqq called Ibn al-Hā'm, a person otherwise unknown to us. The *zīj* of al-Qusuntīnī was not the only baby *zīj* compiled in the Maghrib. Ibn al-Qunfudh in the late fourteenth century compiled a small *zīj* for Tlemcen based on the *zīj* of Ibn al-Bannā'.<sup>3</sup> No other *zīj*es specifically for Fez or Tlemcen are known to us.

A recension for Algiers of the *zīj* of Ibn al-Shātir, the celebrated astronomer of fourteenth-century Damascus, is known from a single manuscript.<sup>4</sup> Considerably more influential was the *zīj* of Ulugh Beg, compiled in fifteenth-century Samargand: Tunisian recensions were prepared by Abū 'Abd Allāh Muḥammad al-Tūnisī known as Sanjaq Dār and by Ḥusayn Quṣ'a, and both survive in several copies.<sup>5</sup> The late fifteenth century Jewish astronomer Zacuto compiled his perpetual almanac in Salamanca.<sup>6</sup> These tables in a modified form were apparently used in the Maghrib (as well as in Ottoman Turkey), and the introduction to them was translated into Arabic by Andalusian astronomers.

In Marrakesh in the early thirteenth century and in Taza in the early

1. On Ibn al-Bannā' see the article in the *DSB* by J. Vernet; *Suter* 1, no. 399; *Renaut* 1, no. 399; *Renaut* 5; and *Cairo Survey*, no. F23. The introduction to his *zīj* is translated in *Vernet* 1.

2. On Ibn al-Raqqām see *Suter* 1, nos. 388 and 417 (?); *Brockelmann*, III, p. 378, and *Cairo Survey*, no. F 22. His *Shāmīl Zīj* is in MS Istanbul Kandilli 249 and his *Qawīm Zīj* is in the Museo Naval de Madrid - see *Vernet* 2, pp. 297-298.

Prof. F. Sezgin has recently drawn attention to a manuscript which he lists as a Maghribi recension of the *zīj* of the eighth-century astronomer al-Fazārī (on whom see the article in *DSB* by D. Pingree), this manuscript being supposedly preserved in Rabat. See further *Sezgin*, VI, p. 123, no. 1. The *zīj*, entitled *al-Zīj al-Qawīm*, has, however, nothing to do with al-Fazārī - see already the discussion in *King* 4, p. 57. Prof. George Saliba of Columbia University informs us that the manuscript is actually in Fez, not Rabat, and that it was listed in a catalog of rare manuscripts exhibited at the Qarawīyyīn in Fez in 1960. In this catalog, published in Rabat, the author is identified as Muḥammad b. Ibrāhīm, that is, Ibn al-Raqqām, not al-Fazārī. Thus this manuscript is probably another copy of the *Qawīm Zīj* of Ibn al-Raqqām.

3. On Ibn al-Qunfudh see *Suter* 1, no. 422, *Renaut* 1, no. 422; *Cairo Survey*, no. F25; and also note 4 on p. 4 above.

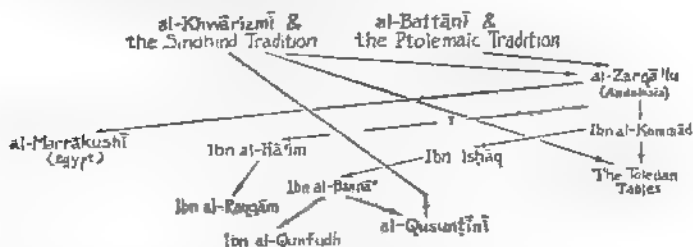
4. On the *zīj* of Ibn al-Shātir see *Kennedy* 1, no. 11. The Algerian recension is extant in MS Cairo DM 533.

5. On the *zīj* of Ulugh Beg see *Kennedy* 1, no. 12. On the copies of the Tunisian recensions preserved in Cairo see *Cairo Survey*, nos. F47 and F53-55.

6. On Zacuto see the article in the *DSB* by J. Vernet. On the manuscripts of his almanac see *Goldstein* 2, especially pp. 239-248. MS Cairo DM 1081 contains a Maghribi version of the almanac and several Arabic treatises relating to it - cf. *Cairo Survey*, no. F 31.

appear to have had more influence in Europe than they had in later Islamic astronomy.<sup>1</sup> The Andalusian astronomer Ibn al-Kammād seems to have based his *zījes* on the work of al-Zarqāllu, and at least one of his *zījes* was in use in the Maghrib in the thirteenth century.<sup>2</sup> A Maghribi astronomer who is known to have relied on a *zīj* of Ibn al-Kammād and also on the observations of a Sicilian Jew, was Ibn Ishāq, a Tunisian who worked in Morocco in the early thirteenth century.<sup>3</sup> He compiled a *zīj* which Ibn Khaldūn tells us was widely used in the Maghrib in the fourteenth century; a copy of this work was recently discovered by the second author in Hyderabad, and awaits detailed study. Ibn Ishāq quotes several earlier scholars whose works are no longer available in their original form: for example, in his chapter on lunar crescent visibility he cites the opinions of the earlier Andalusian astronomers Ibn Mu'adh and Abū'l-Hajjāj al-Sabtī, the latter a student of Maimonides,<sup>4</sup> as well as others whose names are new to the modern literature (see Section 6 below).

In passing we should mention that the late thirteenth-century scholar Abū 'Alī al-Marrākushī,<sup>5</sup> author of an enormous compendium on spherical astronomy and instruments entitled *Jāmi' al-mabādī' wa'l-ghāyāt*, hailed from the Maghrib but wrote his treatise in Cairo. Indeed, al-Marrākushī's work, which was highly influential in Egypt, Syria, and Turkey, appears to have been unknown in the Maghrib. al-Marrākushī quotes such sources as al-Zarqāllu and Ibn al-Kammād, but a thorough investigation of his sources for his writings on instruments has yet to be undertaken. Transmission and influences are indicated in the chart below.



1. On al-Zarqāllu see the article in the *DSB* by J. Vernet. See also Toomer 1 on the *Toledan Tables* and 2 on al-Zarqāllu's solar theory.

2. On Ibn al-Kammād see Suter 1, no. 487; Kennedy 1, nos. 5, 66 and 72; and Toomer 2, pp. 330-331.

3. On Ibn Ishāq see Suter 1, no. 356. See also Rosenthal, III, pp. 136-137 for the remarks of Ibn Khaldūn. The manuscript of his *zīj* is MS Hyderabad Andra Pradesh State Library no. 298 (ca. 200 folios, copied ca. 1400).

4. On Ibn Mu'adh see the article "al-Jayyānī" in the *DSB* by Y. Dold-Samplonius and H. Hermetliak. On al-Sabtī see Suter 1, no. 342.

5. On al-Marrākushī see Suter 1, no. 363 and *Cairo Survey*, no. C17. The first half of his treatise, which deals with spherical astronomy and sundials is translated in Sédillot-père. The second half, which deals with other instruments, was summarised in a rather haphazard fashion in Sédillot-fils.

it, but that he inherited the method from some much earlier source, probably through unknown intermediaries.

Section 6 is a detailed table of contents of the entire *zīj*. Readers who need information concerning the contents of a normal *zīj*, or conventions involving symbols, may consult *Kennedy 1*. The entries in the tables are expressed in the standard medieval Arabic alphanumerical notation.<sup>1</sup> Standard topics omitted by al-Qusunṭīnī are: trigonometric functions, planetary latitudes, fixed stars, geographical coordinates, and astrological functions. Of special interest is a lunar ripeness table.

## 2. *Brief Survey of Astronomy in the Maghrib*

The following account is the first attempt in the modern literature to outline the history of astronomy in the Maghrib.<sup>2</sup> The evidence indicates that such cities as Marrakesh, Tunis, Taza, and Tlemcen, were the scene of an active tradition of astronomy for several centuries. Until the available sources are investigated more thoroughly it will be difficult to establish the connections between the Andalusian and Maghribi traditions in astronomy.<sup>3</sup> Prof. G. Toomer, in his penetrating study of the solar theory of the eleventh-century Andalusian astronomer al-Zarqāllū, has already demonstrated the importance of Maghribi material based on earlier Andalusian sources that are no longer extant in their original form.<sup>4</sup>

From the first five centuries of Islam only one author is known to us from the Maghrib, namely, the astrologer Ibn Abī'l-Rijāl, who worked at the Zirid court in Tunis ca. 1045.<sup>5</sup> Thereafter we have reports of isolated measurements of the obliquity of the ecliptic conducted by an unnamed astronomer in Meknes, by Ibn Hilāl in Sebta, by al-Mirriḡh in Marrakesh, and by Ibn al-Turjumān in an unspecified location, all dating apparently from the twelfth and thirteenth centuries.<sup>6</sup>

The activities of al-Zarqāllū in Cordova and Toledo in the eleventh century

1. Cf. *Irani* on this notation.

2. The standard bio-bibliographical sources in which Maghribi astronomers and their works are listed are the following: *Suter 1*; *Renaud 1*; *Brockelmann*, II, pp. 331-332 and 615-616, and III, pp. 364-365 and 707-709; *Azzawi*, pp. 209-221; and *Cairo Survey*, Section F. See also *Renaud 2* on astronomy in Morocco and *King 1*, pp. 192-193 on astronomy in Tunis. On Maghribi astrolabists and their works see *Gunther*, I, pp. 248-301; *Renaud 4*; *Mayer*, *passim*; and *Brieux & Maddison*. Maghribi contributions to mathematics are surveyed in *Djebbar*.

For catalogs of Maghribi manuscript collections see *Segin*, VI, pp. 329-332, 402-407, and 454-456, and on two particularly rich collections of scientific manuscripts see *Renaud 7* and *Samsó*.

3. On the Andalusian tradition see the numerous publications of J. Millás Vallicrosa, J. Vernet Cinés, and J. Samsó Moyá.

4. Cf. *Toomer 2*.

5. On Ibn Abī'l-Rijāl see note 4 to Section 1 above.

6. These individuals are mentioned in the anonymous commentary on al-Jādārī's poem, on which see note 5 on p. 9.

extant in Arabic in which the planetary theory is essentially Indian rather than Ptolemaic. This Indian planetary theory, popular amongst certain early Muslim astronomers,<sup>1</sup> and not without influence in Andalusia and the Maghrib throughout the medieval period, is known to be based on pre-Ptolemaic Greek astronomical models.<sup>2</sup> The *zij* of al-Khwārizmī was also based on Indian planetary theory, but it has survived only in the Latin translation of an extensive reworking of the original by al-Majrīṭī.<sup>3</sup>

The unique manuscript source of al-Qusuntīnī's *zij* is ff. 44v-63v of MS Escorial ar. 909.<sup>4</sup> The first part of the same manuscript contains a copy of the *zij* of the thirteenth-century Moroccan astronomer Ibn al-Bannā', upon which, as will be seen below, al-Qusuntīnī leans heavily. Al-Qusuntīnī's *zij* is reproduced in facsimile on pp. 22-41 below with kind permission of the authorities of the Biblioteca de El Escorial. The introduction is written in *raja* meter.

In Section 2 we attempt to put al-Qusuntīnī in the context of astronomy in the medieval Maghrib. No clear picture of this general topic can be presented at this time. The known sources present a multiplicity of historical problems, and some of the most important sources have only recently been rediscovered and have not been studied yet.

In the next section, 3, al-Qusuntīnī's mean motion parameters are displayed and discussed. They are seen to be from Western Arabic sources, independent of al-Khwārizmī's mean motions. The same is true of his planetary apogees, also presented.

In Section 4, however, it is shown that al-Qusuntīnī's planetary "equation" tables are essentially the same as those of al-Khwārizmī, except that seconds of arc have been suppressed.

Section 5 is an attempt to infer from al-Qusuntīnī's rules his method of calculating planetary true longitudes. We suggest that the solution is an algorithm which, like the equation tables, is firmly in the Indian (and Sasanian Iranian, and early Islamic) tradition, but which is considerably more primitive than any related rule hitherto noted. We do not think our author originated

1. On the influence of Indian astronomy in early Islamic astronomy see *Pingree 1*. (Prof. Pingree informs us that there are several Sanskrit manuscripts in existence of a work entitled *Yantra Jarkali*, suggesting that al-Zarqālū's works had some modest influence in later Indian astronomy.)

2. See *Pingree 2* for an overview of Indian astronomy.

3. On al-Khwārizmī see the article by G. Toomer in the *DSB*. A medieval Latin translation of al-Majrīṭī's recension of his *zij* is published in *Suter 2*. A translation and commentary is in Neugebauer *2*. Further insight into the original work is provided in Goldstein *2*. On the Byzantine and medieval Latin traditions based on the *Zij al-Sindhīd*, see *Pingree 3*, pp. 151-169, and *Pingree 4*.

4. On the manuscript see *Renaud 2*, pp. 7-10. The manuscript is of Maghribi provenance, but is not dated. It contains (1) the *zij* of Ibn al-Bannā'; (2) the *zij* of al-Qusuntīnī; and (3) a commentary by Ibn al-Qunfadh (*Suter 1*, no. 422) on the astrological poem of Ibn Abī'l-Rijāl (see note 4, p. 3). Renaud gives the name as al-Qusuntīnī but the text has clearly al-Qusuntīnī.

# Indian Astronomy in Fourteenth Century Fez: The Versified *Zīj* of al-Qusuntīnī

E. S. KENNEDY\* & DAVID A. KING\*\*

*Acknowledgements:* This study is based on work done by both authors at the American Research Center in Egypt, sponsored by the Smithsonian Institution, the National Science Foundation, Washington, D.C. and the Ford Foundation. This support is gratefully acknowledged.

It is a pleasure to thank the Biblioteca de El Escorial for permission to reproduce photographs of a manuscript in its collection.

A preliminary draft of this paper was kindly read by Dr. David Pingree of Brown University, and his various suggestions have been incorporated. The authors alone, however, are responsible for any errors and misinterpretations that remain.

## 1. Introduction

A certain Abū'l-Ḥasan 'Alī b. Abī 'Alī al-Qusuntīnī<sup>1</sup> compiled in fourteenth-century Fez a sort of miniature *zīj*, or astronomical handbook comprising tables and explanatory text,<sup>2</sup> which he dedicated to the Merinid Sultan Ibrāhīm al-Musta'in. This *zīj* is distinguished by the fact that the explanatory text is in verse.<sup>3</sup> Many mathematical and astronomical poems, some of considerable sophistication, were composed during the Islamic Middle Ages; most of these were Maghribi compilations and most are as yet unstudied in modern times.<sup>4</sup> The fact that al-Qusuntīnī's *zīj* is in verse, however, is not the reason for our studying the work. Rather, it is because the *zīj* is the only known document

\* The American University of Beirut, Beirut, Lebanon.

\*\* Department of Near Eastern Languages and Literatures, New York University, 50 Washington Square South, New York, New York 10003, USA.

1. Al-Qusuntīnī and his *zīj* are mentioned in *Suter*, no. 371; *Renaud 1*, no. 371; and *Brockelmann*, S II, pp. 364-365. (References in italics are to the bibliography at the end of the paper). The epithet al-Qusuntīnī indicates that our author or his family was originally from Qusuntīniya (= Constantine) on the Algerian littoral. He is not known to have compiled any other works, but we have not consulted any medieval Maghribi biographical works. He is referred to as *al-faqīh*, which indicates his interest in law, and as *al-mu'addī*, which indicates that he was a professional time-keeper associated with a mosque and responsible for the regulation of the times of prayer.

2. A survey of Islamic *zīj*es is Kennedy 1.

3. The only other *zīj* known to us which may have been written in verse is called *al-Zīj al-manẓūm*, and its arrangement in verse is implied by the title, *al-Sirr al-maknūm fī-l-'amal bi'l-zīj al-manẓūm* of a work attributed to the fourteenth-century Syrian scholar Abū'l-Fidā' (*Suter 1*, no. 392), and extant in a unique manuscript in Oxford. See further Kennedy 2, pp. 18 and 22.

4. Some examples of the most popular scientific works in verse are the astrological poem of Ibn Abī 'l-Rijāl (on whom see Pingree 5 and Sergin, VII, pp. 186-188; the poem on algebra by Ibn al-Yasmin (*Suter 1*, no. 320); the poem on timekeeping by al-Jādārī (*Suter 1*, no. 424a); and the poem on all aspects of science by 'Abd al-Rahmān al-Fāsi entitled *al-Ugnūm* (*Renaud 1*, no. 541). Each of these authors worked in the Maghrib.

